Fiche de révisions R5 — *Correction*

Théorèmes de la mécanique

Exercice 1 : Transformation par vent de côté — 2 | 2 |

▷ *Chute libre avec frottement ;*
▷ *PFD.*

1 C'est la vitesse relative qui compte. Pour interpréter/justifier qualitativement cette expression, on peut raisonner sur des cas limites et voir si ce qu'elle donne est physiquement cohérent : ballon posé ($\vec{v}=\vec{0}$), ballon qui va à la même vitesse que le vent, etc.

2 $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-\lambda(\vec{v}-\vec{V})+m\vec{g}$ soit sous forme canonique $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\lambda}{m}\vec{v}=\vec{g}+\dfrac{\lambda}{m}\vec{V}$, et on pose $\tau=m/\lambda$

Solution particulière : $\vec{v}_\mathrm{p}=\dfrac{m}{\lambda}\vec{g}+\vec{V}$.

Finalement, tenant compte de la condition initiale $\vec{v}(0)=\vec{v}_0$,

$$\vec{v}(t)=\mathrm{e}^{-t/\tau}\vec{v}_0+(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})\vec{v}_\mathrm{p}\,.$$

3 On projette

$$\begin{cases}\dot{x}=\mathrm{e}^{-t/\tau}v_0\cos\alpha\cos\beta+0\\ \dot{y}=\mathrm{e}^{-t/\tau}v_0\sin\alpha\cos\beta+(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})V\\ \dot{z}=\mathrm{e}^{-t/\tau}v_0\sin\beta-(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})\tau g\end{cases}$$

et on intègre, sans oublier les constantes d'intégration

$$\begin{cases}x=-\tau\,\mathrm{e}^{-t/\tau}v_0\cos\alpha\cos\beta+K_x\\ y=-\tau\,\mathrm{e}^{-t/\tau}(v_0\sin\alpha\cos\beta-V)+Vt+K_y\\ z=-\tau\,\mathrm{e}^{-t/\tau}(v_0\sin\beta+\tau g)-\tau gt+K_z\end{cases}$$

et on utilise ensuite la condition initiale $(x_B,y_B,0)$ pour obtenir

$$\begin{cases}x=\tau v_0\cos\alpha\cos\beta(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})+x_B\\ y=\tau(v_0\sin\alpha\cos\beta-V)(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})+Vt+y_B\\ z=\tau(v_0\sin\beta+\tau g)(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})-\tau gt\end{cases}$$

4 Il faut trouver l'instant où $x(t_0)=0$, c'est-à-dire où le ballon passe la ligne d'en but. On trouve $t_0=2{,}5\,\mathrm{s}$ On va ensuite regarder les coordonnées $y(t_0)=3{,}5\,\mathrm{m}$ et $z(t_0)=7{,}5\,\mathrm{m}$. Malheureusement, $y(t_0)>d/2=2{,}80\,\mathrm{m}$. Le ballon passe donc à droite des poteaux, l'essai n'est pas transformé, les Anglais gagnent.

5 Si $x_B=0$ l'angle apparent sous lequel est vu les poteaux est nul, et de même si on s'en éloigne infiniment. Il y a donc passage par un maximum entre les deux.

Exercice 2 : Vibration d'une molécule de monoxyde de carbone — 1 | 2 |

▷ *Force exercée par un ressort ;*
▷ *Oscillateur harmonique.*

1 L'atome de carbone n'est soumis qu'à la force exercée par le ressort. Comme on le constate facilement sur la figure 1, sa longueur instantanée est $L = x_2 - x_1$, donc

$$\vec{F}_C = -k(x_2 - x_1 - L_0)(-\vec{e}_x) = +k(x_2 - x_1 - L_0)\vec{e}_x\,.$$

Par application du PFD dans un référentiel galiléen (qu'on ne précisera pas !) et en projetant, on obtient

$$\boxed{m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - L_0)\,.} \tag{1}$$

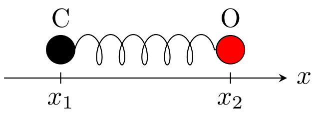

Figure 1 – Molécule de monoxyde de carbone.

2 De même, la force exercée par le ressort sur l'atome d'oxygène vaut

$$\vec{F}_O = -k(x_2 - x_1 - L_0)(+\vec{e}_x) = -k(x_2 - x_1 - L_0)\vec{e}_x\,.$$

et ainsi

$$\boxed{m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - L_0)\,.} \tag{2}$$

3 Par combinaison linéaire,

$$\frac{(1)+(2)}{m_1+m_2} \iff \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{k}{m_1+m_2}(x_2 - x_1 - L_0) - \frac{k}{m_1+m_2}(x_2 - x_1 - L_0)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}x_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}x_2\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}t^2} = 0}$$

De même,

$$\frac{(2)}{m_2} - \frac{(1)}{m_1} \iff \frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m_2}(x_2 - x_1 - L_0) - \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1 - L_0)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2(x_2 - x_1)}{\mathrm{d}t^2} = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(x_2 - x_1 - \ell_0)$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\delta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{\mu}(\delta - \ell_0)\,.}$$

4 • **Expression de σ :** raisonnons par intégrations successives,

$$\ddot{\sigma} = 0 \qquad \text{donc} \qquad \dot{\sigma} = A = \text{cte}\,.$$

À l'instant initial,

$$\dot{\sigma}(t{=}0) \underset{\text{CI}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{x}_1(t{=}0) + \frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{x}_2(t{=}0) = 0 \underset{\text{sol}}{\underset{\uparrow}{=}} A \qquad \text{d'où} \qquad A = 0\,.$$

Ainsi,

$$\dot{\sigma} = 0 \qquad \text{donc} \qquad \sigma = B = \text{cte}\,.$$

À l'instant initial,

$$\sigma(t{=}0) \underset{\text{CI}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{m_1}{m_1+m_2}X_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}X_2 \underset{\text{sol}}{\underset{\uparrow}{=}} B$$

Finalement,

$$\boxed{\sigma = \frac{m_1}{m_1+m_2}X_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}X_2\,.}$$

• **Expression de δ :** l'équation différentielle vérifiée par δ est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{k/\mu}$ et dont $\delta = \ell_0$ est une solution particulière. Ainsi,

$$\delta(t) = \ell_0 + A' \cos(\omega_0 t) + B' \sin(\omega_0 t)\,.$$

À l'instant initial,

$$\delta(t{=}0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} X_2 - X_1 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} \ell_0 + A' + 0 \qquad \text{d'où} \qquad A' = X_2 - X_1 - \ell_0\,.$$

La deuxième condition initiale porte sur la dérivée $\dot\delta$, qui est donnée par

$$\dot\delta = -A'\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B'\omega_0 \cos(\omega_0 t)\,.$$

À l'instant initial,

$$\dot\delta(t{=}0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} \dot x_2(t{=}0) - \dot x_1(t{=}0) = 0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} 0 + B' \qquad \text{d'où} \qquad B' = 0\,.$$

Finalement,

$$\boxed{\delta(t) = \ell_0 + (X_2 - X_1 - \ell_0)\cos(\omega_0 t)\,.}$$

• **Expressions de x_1 et x_2 :** il suffit de renverser le changement de variables pour exprimer x_1 et x_2 en fonction de σ et δ, et de remplacer. À vous de jouer !

5 En identifiant la fréquence des oscillations à celle de l'onde électromagnétique,

$$\nu \underset{\substack{\uparrow\\ \text{EM}}}{=} \frac{c}{\lambda} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{méca}}}{=} \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

on en déduit

$$k = 4\pi^2 \mu \frac{c^2}{\lambda^2}\,.$$

La masse d'un atome de carbone vaut $m_1 = M_\mathrm{C}/\mathcal{N}_\mathrm{A}$, de même pour l'oxygène, et ainsi

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{M_\mathrm{C}\, M_\mathrm{O}}{(M_\mathrm{C} + M_\mathrm{O})\mathcal{N}_\mathrm{A}} = 1{,}1 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}\,.$$

Ainsi,

$$\boxed{k = 1{,}9 \cdot 10^3\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}\,.}$$

Exercice 3 : Anneau sur une tige en rotation 2 | 2

- ▷ *Coordonnées polaires ;*
- ▷ *Réaction du support ;*
- ▷ *Force exercée par un ressort.*

1 Le mouvement est à vitesse angualire constante, donc

$$\vec r = \dot r\,\vec e_r + r\omega\,\vec e_\theta \qquad \text{et} \qquad \vec a = (\ddot r - \omega^2 r)\,\vec e_r + 2\omega\,\dot r\,\vec e_\theta\,.$$

L'anneau est soumis à
- ▷ son poids $\vec P = m\vec g = -mg\,\vec u_z$;
- ▷ la réaction de la tige $\vec R = R_\theta \vec u_\theta + R_z \vec u_z$ car aucun frottement.

D'après le PFD appliqué à l'anneau projeté sur $\vec e_r$,

$$m(\ddot r - \omega^2 r) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\ddot r - \omega^2 r = 0\,.}$$

2 Le polynôme caractéristique admet comme racines $\pm\omega$, d'où

$$r(t) = A\,\mathrm{e}^{+\omega t} + B\,\mathrm{e}^{-\omega t}\,.$$

À l'instant initial,

$$\begin{cases} r(0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} r_0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} A + B \\ \dot r(0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} \omega A - B\omega \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad A = B = \frac{r_0}{2}\,.$$

Ainsi,

$$r(t) = r_0 \cosh(\omega t) \qquad \text{et} \qquad r(\theta) = r_0 \cosh\theta\,.$$

La trajectoire est une spirale exponentielle.

3 Il faut ajouter au PFD la force de rappel du ressort, soit

$$m(\ddot r - \omega^2 r) = -k(r - \ell_0) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\ddot r + ({\omega_0}^2 - \omega^2) r = {\omega_0}^2 \ell_0\,.}$$

Si $\omega_0^2 - \omega^2 > 0$ l'anneau oscille le long de la tige, sinon il a de nouveau une trajectoire en spirale exponentielle divergente, la divergence étant simplement ralentie.

4 Le mouvement de l'anneau est périodique si la période des oscillations le long de la tige est commensurable à la période de rotation, c'est-à-dire s'il existe N et N' tels que

$$N \frac{2\pi}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \omega^2}} = N' \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{soit} \qquad {\omega_0}^2 = \left(1 + \frac{N^2}{N'^2}\right)\omega^2\,.$$

Exercice 4 : Mesure d'un coefficient de frottement dynamique — 2 | 2

- *Théorème de la résultante cinétique ;*
- *Théorème de l'énergie cinétique ;*
- *Lois de Coulomb du frottement solide.*

1 Le solide 1 est soumis à son poids $m\vec g$, à la force de contact avec le support $\vec R = -R_N \vec e_z - R_T \vec e_x$ et à la force de tension du fil $F\vec e_x$. Le solide 2 étant immobile, alors $F = m_2 g$. En supposant qu'il y a adhérence entre les solides,

$$m\vec g + \vec R + \vec F = \vec 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} F - R_T = 0 \\ mg - R_N = 0 \end{cases}$$

Cette hypothèse d'adhérence est valable si

$$R_T < \mu_\mathrm{s} R_N \qquad \text{soit} \qquad m_2 g < \mu_\mathrm{s} m_1 g$$

Ainsi, pour que le glissement démarre, il faut avoir

$$\boxed{\alpha = \frac{m_2}{m_1} > \mu_\mathrm{s}}$$

> *Qualitativement, le poids du solide 2 doit être supérieur à la force de frottement subie par le solide 1.*

2 D'après le théorème de la résultante cinétique appliqué au solide 1 dans le référentiel du laboratoire galiléen,

$$m\ddot x \vec e_x = m\vec g + \vec R + \vec F \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} m\ddot x = F - T \\ 0 = mg - N \end{cases} \qquad \text{et} \qquad m\ddot x = F - \mu_\mathrm{d} mg\,.$$

En revanche, désormais $F \neq m_2 g$. En effet, le solide 2 est soumis à son poids $\alpha m \vec g$ et à la force de tension du fil $-F\vec e_z$, mais comme il est en mouvement alors d'après le théorème de la résultante cinétique,

$$\alpha m\, \ddot z \vec e_z = \alpha m \vec g + \vec F \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\alpha m\, \ddot z = \alpha m g - F\,.}$$

> *Attention à ne pas conclure trop hâtivement ! La force de tension du fil n'a pas de raison d'être égale au poids du solide 2, ce n'est le cas qu'en statique.*

Le fil étant inextensible, donc $\ddot{x} = \ddot{z}$. Sommer les deux écritures du TRC conduit au résultat,

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{\alpha - \mu_\mathrm{d}}{1+\alpha} g}$$

3 Par double intégration,

$$x(t) = \frac{\alpha - \mu_\mathrm{d}}{2(1+\alpha)} g t^2$$

La première phase se termine lorsque les deux solides ont avancé d'une distance H, donc à l'instant

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(1+\alpha)H}{(\alpha - \mu_\mathrm{d})g}}$$

La vitesse vaut alors

$$V_1 = \frac{\alpha - \mu_\mathrm{d}}{1+\alpha} g t_1 = \sqrt{\frac{2(\alpha - \mu_\mathrm{d})gH}{1+\alpha}}$$

4 Le solide parcourt une distance $D - H$ dans la deuxième phase. Le travail de la forme de frottement vaut donc

$$W(\overrightarrow{R_T}) = \int \overrightarrow{R_T} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{M} = -\mu_\mathrm{d} m g (D-H)$$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au solide 1 dans le référentiel du laboratoire au cours de la deuxième phase du mouvement. Le poids et la réaction normale sont orthogonales à la trajectoire et ne travaillent donc pas, si bien que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} m \times 0^2 - \frac{1}{2} m {V_1}^2 &= W(\overrightarrow{R_T}) \\
\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{m} \frac{\cancel{2}(\alpha - \mu_\mathrm{d})\cancel{g}H}{1+\alpha} &= \mu_\mathrm{d} \cancel{m}\cancel{g}(D-H) \\
\frac{\alpha H}{1+\alpha} &= \left(D - H + \frac{H}{1+\alpha} \right) \mu_\mathrm{d} \\
\mu_\mathrm{d} &= \frac{\alpha H}{(1+\alpha)\left(D - H + \dfrac{H}{1+\alpha} \right)} \\
\mu_\mathrm{d} &= \frac{\alpha H}{(1+\alpha)D - (1+\alpha)H + H} \\
\Aboxed{\mu_\mathrm{d} &= \frac{\alpha H}{(1+\alpha)D - \alpha H}\,.}
\end{aligned}$$

Exercice 5 : Une luge sur une bosse

2 | 2 |

- ▷ *Énergie mécanique ;*
- ▷ *Décollage d'un support.*

1 Appliquons le théorème de la résultante cinétique à la luge, en mouvement par rapport au référentiel terrestre que l'on considère galiléen. On se place dans le repère polaire de centre O défini figure 2. La luge est soumise son poids,

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\cos\theta\,\overrightarrow{e}_r + mg\sin\theta\,\overrightarrow{e}_\theta\,,$$

et à la force de réaction de la piste,

$$\overrightarrow{N} = N\overrightarrow{e}_r \qquad \text{avec} \qquad N > 0\,.$$

Ainsi, par application de la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre,

$$m\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{N}$$

et comme

$$\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e}_r \qquad \text{alors} \qquad \overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e}_r + R\ddot{\theta}\overrightarrow{e}_\theta$$

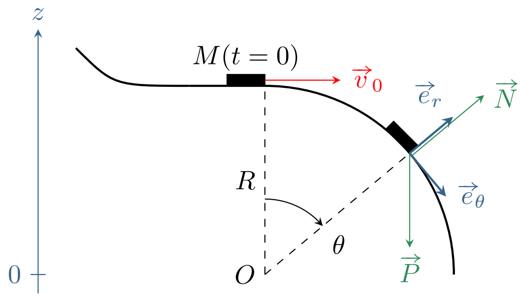

Figure 2 – Schéma des notations.

En projetant sur $\vec{e}_r$, on en déduit

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + N \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{N = -mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta\,.}$$

2 Pour faire apparaître la vitesse initiale au lieu de $\dot{\theta}$, utilisons la conservation de l'énergie mécanique. En effet, la luge n'est soumise qu'à une force conservative (son poids) et à une force qui ne travaille pas (la réaction de la piste). Exprimons l'énergie potentielle de pesanteur de la luge. Comme l'axe z est ascendant et en prenant l'origine des énergies potentielles en $z = 0$, alors

$$E_{\text{pp}} = mgz = mgR\cos\theta\,.$$

De plus, la vitesse de la luge a pour norme $v = R\dot{\theta}$, donc son énergie cinétique vaut

$$E_{\text{c}} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\,.$$

Finalement, son énergie mécanique vaut

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta\,.$$

Cette quantité est constante, égale à sa valeur initiale,

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgR$$

Par identification, on en déduit

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgR = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta$$

ce qui permet d'isoler le terme à remplacer dans l'expression de N,

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgR(1-\cos\theta)$$

$$-mR\dot{\theta}^2 = -\frac{m{v_0}^2}{R} + 2mg(\cos\theta - 1)\,.$$

On en déduit finalement

$$\boxed{N = -\frac{m{v_0}^2}{R} + mg\left(3\cos\theta - 2\right)\,.}$$

3 La luge quitte la piste si la force de réaction s'annule, c'est-à-dire pour un angle θ_{d} tel que $N(\theta_{\text{d}}) = 0$, soit

$$0 = -\frac{m{v_0}^2}{R} + mg\left(3\cos\theta_{\text{d}} - 2\right) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\theta_{\text{d}} = \arccos\left(\frac{{v_0}^2}{3gR} + \frac{2}{3}\right)\,.}$$

Si la vitesse de la luge est faible, à la limite $v_0 \simeq 0$, cet angle est bien défini et vaut $\arccos 2/3$. Ainsi, **la luge quitte la piste quelle que soit sa vitesse initiale.**

4 Pour que l'arccosinus soit défini, il faut que son argument soit inférieur à 1, c'est-à-dire

$$\frac{{v_0}^2}{3gR} + \frac{2}{3} \leq 1 \qquad \text{soit} \qquad {v_0}^2 \leq 3gR \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \qquad \text{donc} \qquad \boxed{v_0 < \sqrt{gR} = v_{\text{lim}}\,.}$$

Si $v_0 > v_{\text{lim}}$, les équations établies dans les questions précédentes indiquent que la norme de la force de réaction $\vec{N}$ serait toujours négative, quelle que soit la valeur de θ. Cela n'a pas de sens, et signifie que l'hypothèse utilisée pour les établir (contact entre la luge et la piste) est fausse. Par conséquent, on en déduit qu'il n'y a jamais de contact : **la luge quitte la piste dès $\boldsymbol{\theta = 0}$**, et elle suit une trajectoire parabolique (chute libre).

Exercice 6 : Balourd

oral banque PT | 3 | 3

▷ *Moment cinétique ;*
▷ *Oscillations autour d'une position d'équilibre.*

1 Deux types de mouvement sont possibles :
▷ si m est suffisamment faible, alors le poids du balourd suffit à compenser celui de la masse et il existe une position d'équilibre ;
▷ si m est trop élevée, alors le poids de la masse entraîne le cylindre en rotation et le fil se déroule complètement.

Le moment du poids du balourd est maximal pour $\theta = \pi/2$, voir figure 3. À l'équilibre dans cette situation limite, en utilisant les bras de levier pour calculer les moments par rapport à Ox,

$$\mathcal{M}_{\mathrm{b,max}} + \mathcal{M}_m = -Mgd + mga = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{m = m_{\mathrm{c}} = M\frac{d}{a}\,.}$$

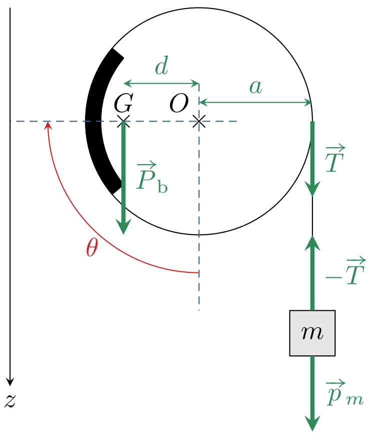

Figure 3 – Position d'équilibre lorsque $m = m_{\mathrm{c}}$.

2 Évidemment, on suppose $m < m_{\mathrm{c}}$. À l'équilibre, $\vec{T} = \vec{p}_m = m\vec{g}$, et le point d'application de $\vec{T}$ ne dépend pas de θ, donc son moment par rapport à (Ox) vaut toujours

$$\mathcal{M}_{\vec{T}} = ||\vec{T}||a = mga\,.$$

Le moment du poids du balourd vaut

$$\mathcal{M}_{\mathrm{b}} = (\overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}_{\mathrm{b}}) \cdot \vec{e}_x = -Mgd\sin\theta$$

Dans la position d'équilibre, ces deux moments se compensent donc

$$-Mgd\sin\theta_{\mathrm{e}} + mga = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\theta_{\mathrm{e}} = \arcsin\frac{ma}{Md}\,.}$$

> *On retrouve la condition d'existence de la position d'équilibre : pour qu'elle soit définie, il faut*
>
> $$ma < Md \qquad \textit{soit} \qquad m < \frac{Md}{a} = m_{\mathrm{c}}\,.$$

3 Commençons par établir l'équation différentielle vérifiée par θ, avant de la linéariser au voisinage de l'équilibre.

Attention ! Lorsque le système n'est pas à l'équilibre, il n'y a plus égalité entre la tension du fil et le poids de la masse m. En effet, le théorème de la résultante cinétique appliquée à cette masse m donne

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{p}_m - \vec{T} \neq \vec{0}\,.$$

Il faut donc être particulièrement vigilant !

• **Première méthode : approche énergétique.** Le système constitué du balourd, de la poulie, du fil et de la masse à soulever n'est soumis à aucune force dissipative, et l'action mécanique interne est compliquée : une méthode énergétique est la plus adaptée. L'axe (Oz) étant orienté vers le bas, l'énergie mécanique totale du système vaut

$$E_\mathrm{m} = \underbrace{\frac{1}{2}J\dot\theta^2 - Mgd\cos\theta}_{\text{balourd}} + \underbrace{\frac{1}{2}m\dot z^2 - mgz}_{\text{masse}} \,.$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = 0 = J\dot\theta\ddot\theta + Mgd\,\dot\theta\,\sin\theta + m\dot z\ddot z - mg\dot z\,.$$

Il est maintenant nécessaire de relier $\dot z$ à $\dot\theta$: lorsque le balourd tourne de $\mathrm{d}\theta > 0$ alors la masse descend de $\mathrm{d}z = a\,\mathrm{d}\theta$, donc $\dot z = a\dot\theta$. Ainsi,

$$\begin{aligned} J\dot\theta\ddot\theta + Mgd\,\dot\theta\,\sin\theta + ma^2\dot\theta\ddot\theta - mga\dot\theta = 0 \\ (J+ma^2)\ddot\theta + Mgd\,\sin\theta - mga = 0 \end{aligned}$$

• **Deuxième méthode : approche par le théorème du moment cinétique.** Appliquons le théorème du moment cinétique au cylindre, soumis au poids du balourd de moment

$$\mathcal{M}_\mathrm{b} = (\overrightarrow{OG}\wedge\overrightarrow{P}_\mathrm{b})\cdot\overrightarrow{e}_x = -Mgd\sin\theta$$

et à la tension du fil, de moment

$$\mathcal{M}_{\overrightarrow{T}} = ||\overrightarrow{T}||a\,.$$

D'après le théorème de la résultante cinétique appliquée à la masse m, cf. ci-dessus,

$$\overrightarrow{T} = m\overrightarrow{g} - m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = m\overrightarrow{g} - m\ddot z\overrightarrow{e}_z\,.$$

En réutilisant le même raisonnement géométrique que dans la première méthode, on trouve $\ddot z = a\ddot\theta$, donc

$$\overrightarrow{T} = m(g - a\ddot\theta)\overrightarrow{e}_z \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}_{\overrightarrow{T}} = mag - ma^2\ddot\theta\,.$$

D'après le théorème du moment cinétique,

$$J\ddot\theta = -Mgd\sin\theta + mag - ma^2\ddot\theta\,.$$

On retrouve heureusement la même équation que par l'approche énergétique ci-dessus. En conclusion, et sachant que $J = Ma^2$, l'équation du mouvement s'écrit

$$\boxed{(m+M)a^2\ddot\theta + Mgd\sin\theta = mga}$$

• **Linéarisation au voisinage de l'équilibre.** Posons $\theta = \theta_\mathrm{e} + \varepsilon$, avec $\varepsilon \ll 1$. On peut alors faire un développement limité du sinus :

$$\sin(\theta_\mathrm{e} + \varepsilon) \simeq \sin\theta_\mathrm{e} + \varepsilon\,\cos\theta_\mathrm{e}\,.$$

> *Il s'agit ni plus ni moins de la formule de Taylor,*
>
> $$f(a+h) = f(a) + h\,f'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \dots$$
>
> *Attention au développement limité : ce n'est pas l'angle θ qui est faible, mais bien l'écart ε. Il est donc a priori faux de faire un développement limité par rapport à θ.*

L'équation différentielle devient

$$(m+M)a^2\ddot\varepsilon + Mgd\cos\theta_\mathrm{e}\,\varepsilon = -Mgd\sin\theta_\mathrm{e} + mga\,,$$

et compte tenu de l'expression de $\sin\theta_\mathrm{e}$ obtenue à la question précédente on obtient

$$\ddot\varepsilon + \frac{Mgd\cos\theta_\mathrm{e}}{(m+M)a^2}\varepsilon = 0\,.$$

> *Il est normal de trouver un second membre nul : l'équation différentielle porte sur l'écart à la position d'équilibre, qui est par définition nul lorsque le système est à l'équilibre.*

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0{}^2 = \frac{Mgd\cos\theta_\mathrm{e}}{(m+M)a^2} = \frac{Mgd\sqrt{1-\left(\dfrac{ma}{Md}\right)^2}}{(m+M)a^2} = \frac{g}{(m+M)a^2}\sqrt{M^2d^2-m^2a^2}$$

d'où on déduit la période des oscillations

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{(m+M)a^2}{g\sqrt{M^2d^2-m^2a^2}}}\,.}$$