BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

Révisions R5

Théorèmes de la mécanique

Cette fiche de révision ne couvre que l'utilisation des théorèmes de la mécanique dans les cas « génériques ». L'application aux particules chargées et aux satellites et planètes sera révisée ultérieurement.

Ressources en ligne

Scanner ou cliquer sur les QR-code pour accéder aux ressources.

Cartes mémo, réalisées par C. Cayssiols.

Vidéos, réalisées par JJ. Fleck.
Les vidéos « l'essentiel » et « démonstrations principales » sont très adaptées à des révisions.

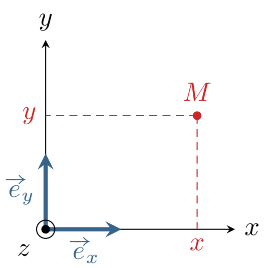
QCM d'applications.
Choisir d'abord le mode « j'apprends » puis éventuellement le mode « je révise ».

Les deux dernières ressources correspondent au programme de PCSI, un peu plus vaste que celui de PTSI : me demander en cas de doute sur ce que vous devez savoir ou pas.

Rappels de cours

A - Cinématique

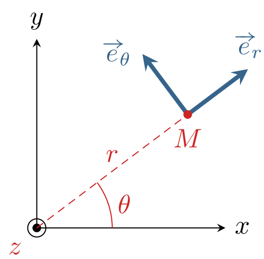
A.1 - Base cartésienne



- **Base fixe** dans le référentiel d'étude : les vecteurs de base ne dépendent pas du temps.
- **Vecteur position :** $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$
- **Vecteur vitesse :** $\vec{v} = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z$
- **Vecteur accélération :** $\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y + \ddot{z}\,\vec{e}_z$

A.2 - Base polaire, cylindrique ou cylindro-polaire

La base cylindrique est définie par rapport à une base cartésienne de référence, indispensable pour poser l'origine O et surtout définir l'angle θ.



- **Base mobile** dans le référentiel d'étude : les vecteurs de base suivent le point M au cours du mouvement et dépendent du temps,

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\,\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r$$

- **Vecteur position :** $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$ (pas de composante sur $\vec{e}_\theta$!)
- **Vecteur vitesse :** $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z$
- **Vecteur accélération :** $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{e}_z$

• **En pratique :** les expressions générales de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ ne sont quasiment jamais utiles, il n'y a donc pas à les retenir. Il suffit de retenir les expressions des dérivées $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$, et de retrouver la vitesse et l'accélération en dérivant le vecteur position au cas par cas.

Exemple : pour un mouvement circulaire où $r = R = \text{cte}$,

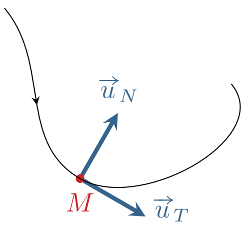
$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\,\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

puis

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}t} = R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + R\dot{\theta}\,\frac{\mathrm{d}\,\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta\,.$$

A.3 - Base de Frénet

Contrairement à la base polaire, la base de Frénet est définie directement par rapport à la trajectoire, sans lien avec une origine et des axes fixes. Ainsi, puisqu'il n'y a pas d'origine, le vecteur position n'a pas d'expression dans la base de Frénet. Les vecteurs de base sont définis de la façon suivante :
- ▷ $\vec{u}_T$ direction tangente à la trajectoire et dans le sens du mouvement ;
- ▷ $\vec{u}_N$ direction orthogonale à la trajectoire et dirigé vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire, de manière rigoureuse vers le centre du cercle osculateur à la trajectoire.



• **Base mobile** dans le référentiel d'étude : les vecteurs de base suivent le point M au cours du mouvement et dépendent du temps.

• **Vecteur position :** pas d'expression.

• **Vecteur vitesse :** $\vec{v} = v\,\vec{u}_T$

• **Vecteur accélération :** $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u}_T + \dfrac{v^2}{R_\mathrm{c}}\vec{u}_N$, avec R_c le rayon de courbure de la trajectoire.

• **En pratique :** La base de Frénet ne sert quasiment que dans le cas de mouvements circulaires, ou éventuellement pour prouver que le mouvement est circulaire ($R_\mathrm{c} = \text{cte}$). Elle est dans ce cas directement reliée à la base polaire, puisque

$$\vec{u}_T = \vec{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \vec{u}_N = -\vec{e}_r\,.$$

En particulier, on peut alors retrouver très rapidement le lien entre vitesse et accélération pour un mouvement circulaire uniforme, ce qui signifie $R_\mathrm{c} = R = \text{cte}$ et $v = \text{cte}$,

$$\vec{a} = \cancel{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}\vec{e}_\theta + \frac{v^2}{R}(-\vec{e}_r) = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r\,.$$

B - Théorèmes de la mécanique

B.1 - Principe fondamental de la dynamique

• **Autre nom :** seconde loi de Newton.

• **Hypothèses :** point matériel M + référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

• **Mathématiquement :**

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\,\vec{p}_{M/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^{N}\vec{F}_n} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases}\vec{p}_{M/\mathcal{R}} = m\,\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\\ \vec{F}_n \text{ force exercée sur le point matériel } M.\end{cases}$$

• **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère :**
- ▷ si toutes les forces sont connues, on obtient l'équation différentielle vectorielle vérifiée par $\vec{v}$;
- ▷ si la vitesse $\vec{v}_M(t)$ est connue à tout instant, on peut en déduire l'expression des forces inconnues, en particulier les forces de liaison (tension d'un fil, réaction du support).

• **Remarques :**
- ▷ il n'y a pas d'intérieur pour un point matériel, donc parler de force extérieure n'a pas de sens ;
- ▷ toutes les autres lois données ici sont des conséquences du PFD ; les seuls postulats de la mécanique newtonienne sont les trois lois de Newton : le principe d'inertie (qui postule l'existence des référentiels galiléens), le principe fondamental de la dynamique et le principe des actions réciproques.

B.2 - Théorème de la résultante cinétique

- **Autres noms :** loi de la quantité de mouvement, théorème du centre d'inertie.
- **Hypothèses :** solide indéformable $\mathcal{S}$ + référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
- **Mathématiquement :**

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^{N} \overrightarrow{F}_n} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \overrightarrow{p}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = m\overrightarrow{v}_{G/\mathcal{R}} \\ \overrightarrow{F}_n \text{ force } \textbf{extérieure} \text{ exercée sur le solide } \mathcal{S}. \end{cases}$$

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère :**
  - ▷ si toutes les forces sont connues, on obtient l'équation différentielle vectorielle vérifiée par la vitesse $\overrightarrow{v}_G$ du centre de masse G du solide indéformable $\mathcal{S}$; en revanche, le TRC n'apporte aucune information sur le mouvement des autres points du solide ;
  - ▷ si la vitesse $\overrightarrow{v}_G(t)$ est connue à tout instant, on peut en déduire l'expression des forces inconnues, en particulier les forces de liaison (tension d'un fil, réaction du support) et les forces exercées par des dispositifs d'asservissement (p.ex. si on impose au système une vitesse constante).
- **Remarque :** on vous pardonnera sans peine l'abus de langage consistant à appeler « PFD » le TRC.

B.3 - Théorème du moment cinétique vectoriel

- **Hypothèses :** point matériel M + référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
- **Mathématiquement :**

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_{A,M/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^{N} \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F}_n)} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} A \text{ un point } \textbf{fixe} \text{ dans } \mathcal{R} \\ \overrightarrow{L}_{A,M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{p}_{M/\mathcal{R}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F}_n) = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F}_n \end{cases}$$

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère :**
  - ▷ si toutes les forces sont connues, on obtient l'équation différentielle vectorielle vérifiée par $\overrightarrow{v}$ ... le TMC apporte donc exactement la même information que le PFD, qui est souvent plus simple à utiliser : il sert très peu en tant que tel ;
  - ▷ l'utilisation la plus classique est le cas de conservation : si la somme des moments des forces est nulle, alors $\overrightarrow{L}_{A,M/\mathcal{R}}$ est constant, et donc le mouvement est plan car $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{L}_{A,M/\mathcal{R}}$.
- **Remarques :**
  - ▷ Dans une écriture abrégée, on peut très vite ne plus préciser M et $\mathcal{R}$, en revanche il faut toujours garder dans les écritures le point par rapport auquel les moments sont calculés. L'écriture la plus compacte possible est donc $\overrightarrow{L}_A$.
  - ▷ Il existe une version du TMC vectoriel pour un solide, utilisant la matrice d'inertie : elle est au programme de SI mais pas de physique.

B.4 - Théorème du moment cinétique scalaire

- **Hypothèses :** solide indéformable $\mathcal{S}$ ou éventuellement point matériel M + référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
- **Mathématiquement :**

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}L_{z,\mathcal{S}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^{N} \mathcal{M}_z(\overrightarrow{F}_n)}$$

avec, dans le cas d'un solide en rotation autour de l'axe (Oz),
  - ▷ $L_{z,M/\mathcal{R}} = J\omega = J\dot{\theta}$, où J est le moment d'inertie du solide indéformable $\mathcal{S}$ par rapport à l'axe de rotation et $\omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire de rotation autour de cet axe ;
  - ▷ $\mathcal{M}_z(\overrightarrow{F}) = (\overrightarrow{AM_F} \wedge \overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{e}_z$, où A est un point appartenant à l'axe de rotation et M_F le point d'application de la force $\overrightarrow{F}$;
  - ▷ $\mathcal{M}_z(\overrightarrow{F}) = \pm||\overrightarrow{F}||b$, où b est le bras de levier, c'est-à-dire la distance du point d'application M_F à l'axe de rotation, et le signe $\pm$ se détermine qualitativement ($\oplus$ si la force $\overrightarrow{F}$ tend à faire tourner le solide en sens trigonométrique autour de l'axe de rotation, $\ominus$ si c'est en sens horaire).

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère :**
  - ▷ si tous les moments sont connus, on obtient l'équation différentielle scalaire vérifiée par la vitesse de rotation $\dot\theta$;
  - ▷ si la vitesse angulaire $\omega(t)$ est connue à tout instant, on peut en déduire l'expression des moments inconnus, en particulier les moments de liaison et ceux exercés par des dispositifs d'asservissement (p.ex. si on impose au système de tourner à vitesse angulaire constante).

- **Remarques :**
  - ▷ calculer un moment par le bras de levier n'est efficace que lorsque le bras de levier est évident, autrement il est plus prudent de passer par les vecteurs et les projections ;
  - ▷ le TMC scalaire est lui aussi rarement utile pour un point matériel ... bien que valable !
  - ▷ le moment vectoriel d'une force est un vecteur, le moment scalaire est ... un scalaire ! Attention aux flèches dans vos copies.

B.5 - Théorème de l'énergie cinétique : version instantanée

- **Autre nom :** théorème de la puissance cinétique.
- **Hypothèses :** point matériel M ou solide indéformable $\mathcal{S}$ + référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
- **Mathématiquement :**

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c},\mathcal{S}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^{N} \mathcal{P}_n}$$

Les expressions de l'énergie cinétique et des puissances diffèrent selon le mouvement du solide :

▷ pour une translation le long d'un axe (Oz),

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2} m {v_z}^2 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}_n = \vec{F}_n \cdot \vec{v}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$$

▷ pour une rotation autour d'un axe (Oz),

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2} J \dot\theta^2 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}_n = \mathcal{M}_z(\vec{F}_n)\,\dot\theta$$

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère :**
  - ▷ si toutes les puissances sont connues, on obtient l'équation différentielle scalaire vérifiée par $v = ||\vec{v}||$ (resp. $\dot\theta$), mais dans le cas général d'un point matériel elle contient moins d'information que celle issue du PFD (équation vectorielle équivalente à trois équations scalaires) ;
  - ▷ une utilisation très classique est le cas de conservation : si la somme des puissances est nulle, alors E_c et donc v (resp. $\dot\theta$) est constante, ce qui signifie que le mouvement est uniforme.

- **Remarques :** le TEC instantané est exactement équivalent au TRC (projeté) pour une translation ou au TMC scalaire pour une rotation, à vous de choisir votre méthode préférée si vous devez établir l'équation différentielle du mouvement.

B.6 - Théorème de l'énergie cinétique : version intégrale

- **Hypothèses :** point matériel M ou solide indéformable $\mathcal{S}$ + référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
- **Mathématiquement :** pour une trajectoire $\widehat{AB}$,

$$\boxed{\Delta E_\mathrm{c} = E_\mathrm{c}(B) - E_\mathrm{c}(A) = \sum_{n=1}^{N} W_n} \qquad \text{avec} \qquad W_n = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}_n \cdot \vec{\mathrm{d}\ell}$$

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère :**
  - ▷ si toutes les forces sont connues, on en déduit la valeur de la vitesse $v = ||\vec{v}||$ au point d'arrivée connaissant la vitesse intiale ;
  - ▷ si les vitesses de départ et d'arrivée sont connues, on peut en déduire l'énergie fournie ou prélevée au système par une force inconnue (p.ex. frottements, moteur, freinage, etc.) sans avoir besoin de calculer cette force ;
  - ▷ plus généralement, dès qu'on cherche des informations sur la vitesse en fonction de la position plutôt que du temps, les versions intégrales des théorèmes énergétiques sont bien plus adaptées que tous les théorèmes faisant intervenir des dérivées.

- **Remarques :** le TEC intégral sert assez rarement en pratique, car dans les situations où il serait utile il est presque toujours plus intéressant d'utiliser la conservation de l'énergie mécanique.

B.7 - Théorème de l'énergie mécanique : version instantanée

- **Autre nom :** théorème de la puissance mécanique.
- **Hypothèses :** point matériel M ou solide indéformable $\mathcal{S}$ + référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
- **Mathématiquement :**

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R} = \sum_{n=1}^{N} \mathcal{P}_{n,\mathrm{NC}}\,,}$$

où la somme est cette fois restreinte aux puissances des seules actions mécaniques non conservatives.

L'utilisation la plus courante est le cas de conservation : si le système n'est soumis qu'à des actions mécaniques conservatives ou qui ne travaillent pas (p.ex. réaction normale), alors

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = 0\,.$$

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère :**
  - ▷ dans le cas de mouvements conservatifs à un degré de liberté étudiés en coordonnées polaires (mouvement circulaire), exprimer l'énergie mécanique en fonction des variables $(\theta, \dot\theta)$ puis la dériver permet d'obtenir l'équation différentielle du mouvement de manière beaucoup plus efficace que le PFD ;
  - ▷ cette méthode peut aussi être utile dans le cas de forces « originales » (p.ex. aimant, van der Waals, etc.) dont seule l'énergie potentielle serait donnée par un énoncé.

B.8 - Théorème de l'énergie mécanique : version intégrale

- **Hypothèses :** point matériel M ou solide indéformable $\mathcal{S}$ + référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
- **Mathématiquement :** pour une trajectoire $\widehat{AB}$,

$$\Delta E_\mathrm{m} = E_\mathrm{m}(B) - E_\mathrm{m}(A) \sum_{n=1}^{N} W_{n,\mathrm{NC}}$$

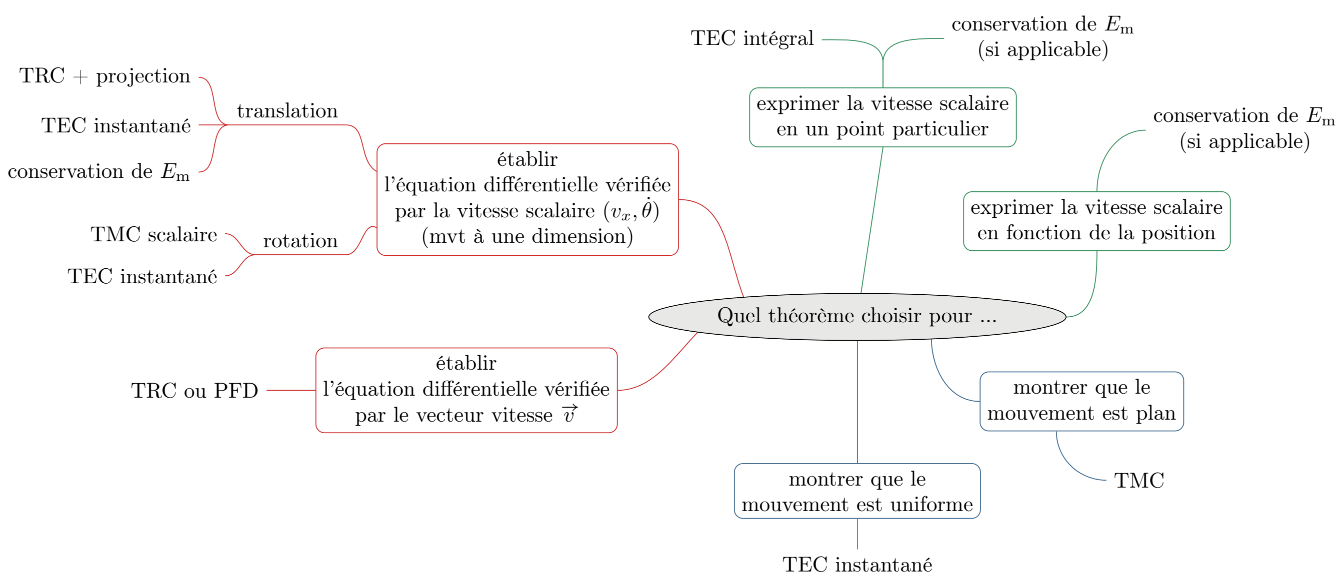
où la somme est restreinte aux travaux des seules actions mécaniques non conservatives.

La version intégrale du TEM ne sert pratiquement que dans le cas de conservation : si le système n'est soumis qu'à des actions mécaniques conservatives ou qui ne travaillent pas, alors

$$E_\mathrm{m} = \mathrm{cte} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall M, \quad E_\mathrm{m}(M) = E_\mathrm{m}(t{=}0)$$

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère :**
  - ▷ les énergies potentielles étant connues en fonction de la position, on en déduit la valeur de la vitesse $v = ||\overrightarrow{v}||$ en n'importe quel point de la trajectoire à partir des conditions initiales ;
  - ▷ plus généralement, dès qu'on cherche des informations sur la vitesse en fonction de la position plutôt que du temps, les versions intégrales des théorèmes énergétiques sont bien plus adaptées que tous les théorèmes faisant intervenir des dérivées.

C - Schéma bilan : quel théorème choisir ?



D - Analogies formelles entre translation et rotation

Translation rectiligne	Rotation autour d'un axe fixe
z direction du mouvement	z axe de rotation
Position z Vitesse $\dot z$	Angle θ Vitesse angulaire $\dot\theta$
Masse m Quantité de mouvement $p_z = m\dot z$ Composantes des forces $F_{i,z}$	Moment d'inertie J Moment cinétique $L_z = J\dot\theta$ Moments et couples $\mathcal{M}_{z,i}$
Théorème de la résultante cinétique (projeté) : $\dfrac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} = m\ddot z = \sum F_{i,z}$	Théorème du moment cinétique (scalaire) : $\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J\ddot\theta = \sum \mathcal{M}_{z,i}$
Puissance d'une force $\mathcal{P} = F_z \dot z$ Travail $W = \displaystyle\int_{z_A}^{z_B} F_z\,\mathrm{d}z$ Énergie cinétique $E_\mathrm{c} = \dfrac{1}{2}m\dot z^2$	Puissance d'un moment $\mathcal{P} = \mathcal{M}_z\dot\theta$ Travail $W = \displaystyle\int_{\theta_A}^{\theta_B} \mathcal{M}_z\,\mathrm{d}\theta$ Énergie cinétique $E_\mathrm{c} = \dfrac{1}{2}J\dot\theta^2$
Théorème de l'énergie cinétique instantané : $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\sum_i \mathcal{P}(F_i)$ $\rightsquigarrow$ même équation que le PFD	Théorème de l'énergie cinétique instantané : $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\sum_i \mathcal{P}(\mathcal{M}_i)$ $\rightsquigarrow$ même équation que le TMC
Théorème de l'énergie cinétique intégral : $\dfrac{1}{2}mv_B^2 - \dfrac{1}{2}mv_A^2 = \sum_i W(F_i)$	Théorème de l'énergie cinétique intégral : $\dfrac{1}{2}J\dot\theta_B^2 - \dfrac{1}{2}J\dot\theta_A^2 = \sum_i W(\mathcal{M}_i)$

E - Formulaire de forces

E.1 - Poids

$$\boxed{\vec P = m\vec g} \qquad \text{avec} \qquad ||\vec g|| = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

Force conservative qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_\mathrm{pp} = \pm mgz + \mathrm{cte} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} + & \text{si axe vers le haut} \\ - & \text{si axe vers le bas} \end{cases}$$

E.2 - Force de rappel d'un ressort

$$\boxed{\vec{F}_{\rm r} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{\rm ext}}$$

avec k constante de raideur, ℓ longueur instantanée du ressort, ℓ_0 longueur à vide et $\vec{u}_{\rm ext}$ le vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur du ressort au point où il est attaché au système.

Force conservative qui dérive de l'énergie potentielle élastique :

$$E_{\rm pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

Attention ! Il faut être méthodique pour exprimer ℓ et $\vec{u}_{\rm ext}$ dans la base adaptée au problème ... mais surtout, **surtout**, SURTOUT on n'essaye **pas** d'avoir l'air intelligent en devinant les signes à partir d'un schéma : le sens de la force change si le ressort est comprimé ou étiré, le risque d'erreur est donc ... élevé.

E.3 - Force de frottement fluide

$$\boxed{\vec{f} = -\alpha\vec{v} \qquad \text{ou} \qquad \vec{f} = -\beta||\vec{v}||\vec{v}}$$

Le modèle de force (linéaire ou quadratique) et l'expression/la valeur des coefficients de frottement α et β dépend de la nature de l'écoulement (nombre de Reynolds), de sa forme, de son état de surface, etc. Ce sont des paramètres empiriques dont il n'existe en général pas d'expression théorique.

⇝ pour aller plus loin : voir cours de PT sur la viscosité.

E.4 - Réaction du support

Il s'agit d'une action de liaison (entre le système et le support sur lequel il est posé), donc

$$\boxed{\vec{R}_{\rm N} \text{ et } \vec{R}_{\rm T} \text{ n'ont pas d'expression générale !}}$$

Cette idée que vous connaissez bien en SI (composantes inconnues dans le torseur d'une action de liaison) ne doit pas vous étonner en physique !

Les deux composantes normale et tangentielle sont reliées par les lois de Coulomb du frottement solide (qui doivent toujours vous être rappelées dans un énoncé de physique) :

▷ tant qu'il y a glissement,

$$||\vec{v}_{\rm g}|| > 0 \qquad \text{et} \qquad ||\vec{R}_{\rm T}|| = \mu_{\rm d}||\vec{R}_{\rm N}||\,;$$

▷ tant qu'il y a adhérence,

$$||\vec{v}_{\rm g}|| = 0 \qquad \text{et} \qquad ||\vec{R}_{\rm T}|| < \mu_{\rm s}||\vec{R}_{\rm N}||\,;$$

avec $\mu_{\rm s}$ et $\mu_{\rm d}$ les coefficients de frottement statique et dynamique.

⇝ pour aller plus loin : comme la formulation en « tant que ... » peut le laisser deviner, les questions de frottement solide se traitent par disjonction de cas, exactement comme celles avec un ALI en saturation.

E.5 - Force de pression

Dans le cas simple d'une paroi plane soumise à une pression uniforme :

$$\boxed{\vec{F}_P = PS\vec{n}}$$

avec S la surface de la paroi et $\vec{n}$ le vecteur normal à la paroi dirigé dans le sens qui conduirait le fluide à s'étaler.

⇝ pour aller plus loin : voir cours de PT sur le calcul de la résultante des forces de pression.

E.6 - Poussée d'Archimède

La poussée d'Archimède est la résultante des forces de pression sur un solide totalement immergé, les prendre en compte séparément revient donc à faire deux fois la même chose.

$$\boxed{\vec{\Pi}_{\rm A} = -\rho V_{\rm imm}\vec{g}} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \rho \text{ masse volumique du fluide} \\ V_{\rm imm} \text{ volume immergé} \end{cases}$$

E.7 - Force de gravitation

Force exercée par un corps de masse m_0 situé en O (origine du repère) sur un autre corps de masse m situé en M :

$$\boxed{\vec{F}_{\mathrm{g}} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r^2}\vec{e}_r}$$

avec $\mathcal{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$ la constante gravitationnelle, parfois appelée constante de Cavendish (in particular in english !)

Force conservative qui dérive de l'énergie potentielle gravitationnelle :

$$E_{\mathrm{pg}} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r}$$

Attention ! Par définition, le poids *est* la force de gravitation exercée par la Terre sur un objet se trouvant à sa surface. Prendre en compte à la fois le poids et la force de gravitation dans un même bilan de forces (p.ex. sur une fusée qui décolle) revient donc à compter deux fois la même force.

E.8 - Force de Coulomb

Force exercée par une charge q_0 située en O (origine du repère) sur une autre charge q située en M :

$$\boxed{\vec{F}_{\mathrm{C}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^2}\vec{e}_r}$$

avec $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$ la permittivité diélectrique du vide.

Force conservative qui dérive de l'énergie potentielle coulombienne :

$$E_{\mathrm{pC}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r}$$

E.9 - Force de Lorentz

$$\boxed{\vec{F}_{\mathrm{L}} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right)}$$

La partie magnétique ne travaille pas, la partie électrique dérive de l'énergie potentielle électrique :

$$E_{\mathrm{pe}} = qV$$

avec V le potentiel électrique dont dérive le champ $\vec{E}$.

$\rightsquigarrow$ pour aller plus loin : voir cours de PT sur le champ et le potentiel électrostatiques.

E.10 - Force de Laplace

Force subie par un élément mésoscopique de circuit de longueur $\mathrm{d}\ell$ parcouru par un courant i :

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{L}} = i\,\mathrm{d}\vec{\ell}\wedge\vec{B}}$$

où le vecteur $\mathrm{d}\vec{\ell}$ est dirigé dans le sens choisi positif de i (= sens arbitraire indiqué par la flèche sur le circuit).

Questions de cours

Seuls les étudiants du groupe de TD PT* seront interrogés en colle sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

R5.1 - Établir l'expression de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires, d'abord dans le cas particulier d'un mouvement circulaire, puis dans le cas général.

> *Ne pas oublier que $r = cte \implies \dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$ pour un mouvement circulaire, ce qui simplifie grandement le calcul.*

R5.2 - Établir l'équation de la trajectoire d'un point matériel en chute libre sans frottement, lancé avec une vitesse $\vec{v}_0$ formant un angle α avec l'horizontale.

R5.3 - Établir l'équation du mouvement d'un pendule simple par application du PFD en coordonnées polaires (**la méthode est imposée**). On commencera par établir l'expression utile de l'accélération.

R5.4 - Établir l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique masse-ressort en exploitant la conservation de l'énergie mécanique (**la méthode énergétique est imposée**). La résoudre pour des conditions initiales $x(0) = X_0$ et $v(0) = V_0$.

> ***Méthode :*** *Schéma obligatoire pour définir les notations. Le système est la masse, on choisit le repère tel que la longueur du ressort soit x. Son énergie mécanique s'écrit*
>
> $$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (x - \ell_0)^2 \,.$$
>
> *La masse n'est soumise qu'à des forces conservatives ou des forces qui ne travaillent pas, son énergie mécanique est donc constante. On en déduit*
>
> $$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} \underset{\substack{\uparrow \\ expr}}{=} m\dot{x}\ddot{x} + k(x - \ell_0)\dot{x} \underset{\substack{\uparrow \\ cte}}{=} 0 \,,$$
>
> *ce qui permet de retrouver l'équation du mouvement en simplifiant par $\dot{x}$.*
>
> *Pour trouver les constantes d'intégration, il est plus simple de raisonner sur la solution en cos + sin. Après calculs, on trouve*
>
> $$x(t) = \ell_0 + (X_0 - \ell_0)\cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega}\sin(\omega_0 t) \,.$$

R5.5 - On lance à la verticale un projectile de masse m avec une vitesse v_0. Quelle hauteur maximale peut-il atteindre avant de retomber ?

> ***Méthode :*** *comme on cherche la hauteur « maximale », on néglige les frottements si bien que l'énergie mécanique du projectile se conserve. Il suffit d'écrire l'égalité de l'énergie mécanique aux deux points particuliers qui nous intéressent :*
>
> $$E_m \underset{\substack{\uparrow \\ CI}}{=} \frac{1}{2} m {v_0}^2 + 0 \underset{\substack{\uparrow \\ max}}{=} 0 + m g h_{max} \qquad \text{d'où} \qquad h_{max} = \frac{{v_0}^2}{2g} \,.$$

(★) R5.6 - Établir l'équation du mouvement du pendule pesant par application du théorème du moment cinétique et/ou par conservation de l'énergie mécanique (méthode au choix de l'étudiant).

> *Ne pas confondre pendule pesant (solide de moment d'inertie J dont le centre de masse se trouve à une distance d de l'axe de rotation) et pendule simple (point matériel attaché à un fil idéal de longueur ℓ).*

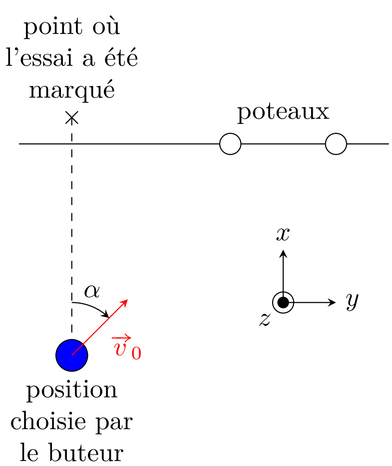
Pour s'entraîner

- Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
- Difficulté technique et calculatoire ;
- Exercice important.

Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé

Exercice 1 : Transformation par vent de côté — 2 | 2 |

▷ *Chute libre avec frottement ;*
▷ *PFD.*



Dernières minutes du match France-Angleterre du Tournoi des six Nations. La France vient de marquer un essai et se trouve en position de l'emporter face aux Anglais, si son buteur le transforme. Le match a lieu en Angleterre, donc il pleut, et un fort vent latéral balaye le stade de Twickenham.

Sur la figure ci-contre, le terrain est vu du dessus. Au rugby, l'essai est l'action de jeu qui consiste à aplatir le ballon dans la zone d'en-but de l'adversaire, ce qui rapporte 5 points. L'équipe peut ensuite transformer l'essai, ce qui rapporte 2 points supplémentaires. Il s'agit d'envoyer par un coup de pied le ballon entre les poteaux et au dessus de la barre transversale. Les deux poteaux sont séparés de $d = 5{,}6\,\mathrm{m}$ et la barre transversale est haute de $h = 3{,}0\,\mathrm{m}$. La tentative de transformation est faite depuis un point en arrière de l'endroit où l'essai a été marqué. La ligne entre l'endroit où l'essai a été marqué et le lieu de tentative de transformation est une parallèle à la ligne de touche. La distance entre la ligne d'en-but et l'endroit de la tentative de transformation est choisie par le buteur, elle est celle qu'il estime la plus favorable à la réussite de sa transformation.

On utilise le repérage cartésien défini sur la figure, dont l'origine est choisie au centre des poteaux. Le vent a une vitesse constante $\vec{V} = V\,\vec{e}_y$. On note $(x_B, y_B, 0)$ les coordonnées du buteur au moment où il tire, propulsant le ballon avec une vitesse initiale v_0. Cette vitesse forme un angle β avec le plan (xOy) et sa projection dans ce plan forme un angle α avec l'axe x. Les frottements de l'air sur le ballon sont modélisés par une force de frottement fluide linéaire décrite par un coefficient λ.

1 - Justifier qualitativement que la résultante des forces exercées par l'air (incluant le vent) sur le ballon s'écrit

$$\vec{F} = -\lambda(\vec{v} - \vec{V})\,.$$

2 - En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\vec{v}$ et la résoudre analytiquement.

3 - Déterminer l'évolution des trois coordonnées x, y, z du ballon au cours du temps.

4 - Les expressions précédentes sont représentées en fonction du temps sur la figure 1. Qui gagne le match ?

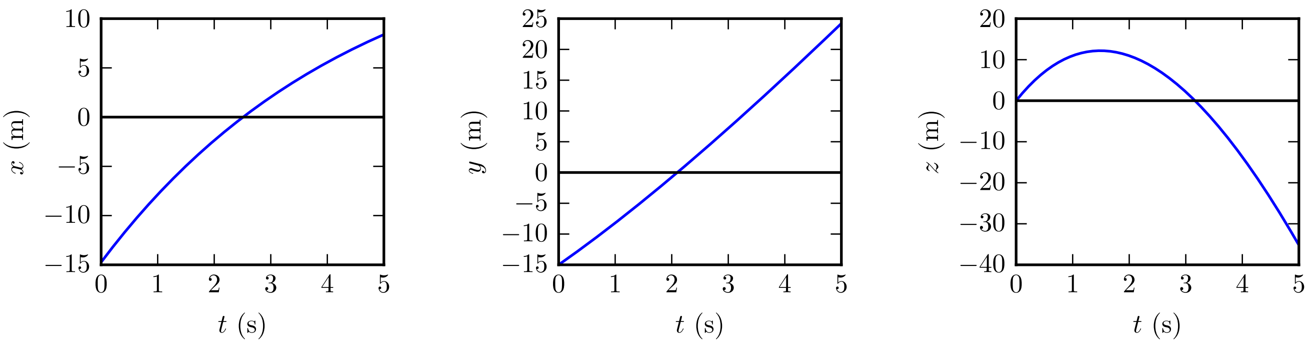


Figure 1 – Tracé numérique des coordonnées du ballon.

5 - En supposant que la distance de tir n'est pas un problème, justifier sans calcul qu'il existe une position x_B optimale pour le buteur.

Exercice 2 : Vibration d'une molécule de monoxyde de carbone 1 | 2 |

▷ *Force exercée par un ressort ;*
▷ *Oscillateur harmonique.*

Une molécule de monoxyde de carbone CO est modélisée par deux atomes de masses m_1 et m_2, reliés par un pseudo-ressort de raideur k et longueur à vide L_0, libres de se déplacer à une dimension le long d'un axe (Ox). La position de l'atome de carbone (resp. oxygène) est repérée par l'abscisse x_1 (resp. x_2), avec $x_2 > x_1 > 0$.

On suppose les deux atomes initialement immobiles et on note leurs positions X_1 et X_2. Tout au long de l'exercice, le poids des deux atomes sera négligé.

1 - Effectuer un bilan des forces sur l'atome de carbone et établir l'équation différentielle de son mouvement.

2 - Faire de même pour l'atome d'oxygène.

Ces deux équations sont couplées : le mouvement d'un atome dépend du mouvement de l'autre. On introduit deux nouvelles variables,

$$\sigma = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,x_2 \qquad \text{et} \qquad \delta = x_2 - x_1\,,$$

et on définit la masse réduite μ du système par

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\,.$$

3 - Montrer que σ et δ sont solution de deux équations différentielles découplées.

4 - Résoudre ces équations compte tenu des conditions initiales, puis en déduire les expressions de x_1 et x_2.

5 - Ces oscillations sont responsables de l'émission d'une onde électromagnétique infrarouge de longueur d'onde $\lambda = 4{,}6\,\mu\mathrm{m}$. Déterminer la raideur k du pseudo-ressort reliant les deux atomes.

Données :
▷ Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3{,}0 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$;
▷ Masses molaires : $M_\mathrm{C} = 12\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ et $M_\mathrm{O} = 16\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$;
▷ Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_\mathrm{A} = 6{,}0 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$.

Exercice 3 : Anneau sur une tige en rotation — 2 | 2

- *Coordonnées polaires ;*
- *Réaction du support ;*
- *Force exercée par un ressort.*

Une tige $\mathcal{T}$ horizontale passant par O tourne autour de l'axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire ω constante. Un anneau, assimilé à un point matériel M de masse m, peut coulisser sans frottement sur la tige. Il est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) dans le plan (Oxy).

À l'instant $t = 0$, l'anneau est abandonné sans vitesse initiale par rapport à la tige à la distance r_0 de l'origine O. On suppose de plus qu'à ce même instant, la tige est confondue avec l'axe (Ox) : $\theta(t{=}0) = 0$.

1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.

2 - Résoudre cette équation et tracer l'allure de $r(t)$. En déduire l'équation de la trajectoire $r(\theta)$ et la représenter.

3 - On suppose désormais que l'anneau est retenu par un ressort de raideur k fixé en O. Montrer que deux types de mouvement sont possibles selon la valeur de k.

4 - À quelle(s) condition(s) le mouvement de l'anneau dans le référentiel terrestre est-il périodique ?

Exercice 4 : Mesure d'un coefficient de frottement dynamique — 2 | 2

- *Théorème de la résultante cinétique ;*
- *Théorème de l'énergie cinétique ;*
- *Lois de Coulomb du frottement solide.*

Le dispositif schématisé figure 2 permet de mesurer le coefficient de frottement dynamique entre un solide et le support fixe sur lequel il glisse. Le solide 1 de masse m, est lié par un fil au solide 2 de masse αm. Le fil de longueur L est inextensible et sans masse, et passe par la gorge d'une poulie idéale, ce qui permet de considérer la norme de la tension du fil identique tout au long du fil. Le frottement du solide 1 sur le support est décrit par les coefficients μ_s (statique) et μ_d (dynamique). On rappelle les lois de Coulomb du frottement reliant les deux composantes R_N et R_T de la force de contact entre solides :
- tant qu'il y a adhérence entre les deux solides, alors $R_T \leq \mu_\mathrm{s} R_N$
- tant qu'il y a glissement entre les deux solides, alors $R_T = \mu_\mathrm{d} R_N$.

À l'instant initial, les deux solides sont immobiles et le fil tendu. Le solide 1 se trouve à l'abscisse $x(t{=}0) = 0$ et le solide 2 à une hauteur initiale H au dessus du sol. Le mouvement se décompose en deux phases, avant et après que le solide 2 ait touché le sol. Le solide 1 est d'abord entraîné par le solide 2, puis au cours de la seconde phase il ralentit progressivement et s'arrête après avoir parcouru une distance totale D.

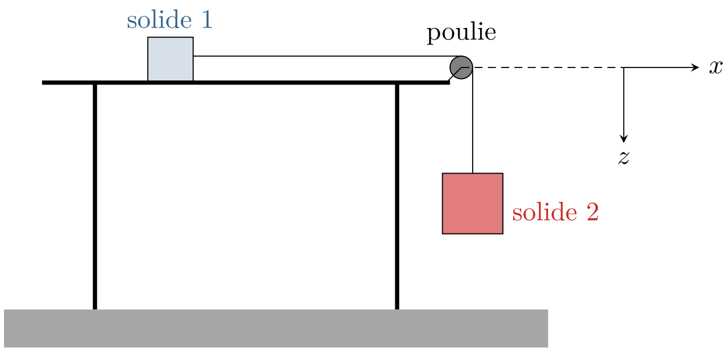


Figure 2 – **Expérience de mesure du coefficient de frottement dynamique.**

1 - À quelle condition le solide 2 peut-il mettre en mouvement le solide 1 ?

2 - Montrer qu'au cours de la première phase

$$\ddot{x} = \frac{\alpha - \mu_\mathrm{d}}{1 + \alpha} g \,.$$

3 - Déterminer la vitesse V_1 du solide 1 à la fin de la première phase.

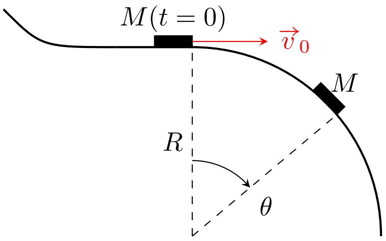
4 - Procéder à une étude énergétique de la seconde phase du mouvement et montrer que

$$\mu_\mathrm{d} = \frac{\alpha H}{(1 + \alpha) D - \alpha H} \,.$$

Exercice 5 : Une luge sur une bosse

2 | 2 |

▷ *Énergie mécanique ;*
▷ *Décollage d'un support.*



Une luge, modélisée par un point matériel M de masse m, arrive sur une bosse à profil circulaire avec une vitesse horizontale $\vec{v}_0$. Tant que la luge suit ce profil, sa trajectoire est circulaire de rayon R et sa position est repérée par l'angle θ. On néglige tout frottement.

1 - Déterminer la norme de la force de réaction $\vec{N}$ exercée par la piste sur la luge en fonction de sa position θ et de sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

2 - En déduire l'expression de N en fonction de θ et de la vitesse initiale v_0. Attention, $\dot{\theta}$ ne doit plus apparaître dans l'expression finale.

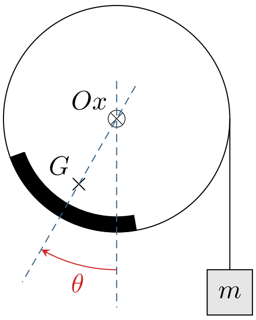
3 - À quelle condition la luge quitte-t-elle la piste ? Exprimer l'angle de décollage θ_d. Glisser prudemment (v_0 petit) empêche-t-il la luge de décoller ?

4 - Justifier que l'expression de θ_d obtenue précédement ne peut plus être juste lorsque la vitesse initiale est trop élevée. Identifier une vitesse limite v_lim. Que se passe-t-il si $v > v_\mathrm{lim}$?

Exercice 6 : Balourd

oral banque PT | 3 | 3

▷ *Moment cinétique ;*
▷ *Oscillations autour d'une position d'équilibre.*



Un cylindre d'axe (Ox) et de rayon a tourne librement. Un dépôt sur la paroi du cylindre forme un balourd de masse M et centre de masse G. On pose $OG = d$. Le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation vaut $J = Ma^2$. On néglige la masse propre et l'inertie du cylindre devant celles du balourd. Une masse m est accrochée à un fil inextensible de masse nulle enroulé autour du cylindre.

1 - Expliquer qualitativement le mouvement obtenu pour plusieurs valeurs de la masse m. Identifier une masse critique m_c.

2 - Déterminer l'angle d'équilibre θ_e.

3 - Donner la période des petites oscillations du système autour de cet équilibre.

> ***Indication :*** *La dernière question est difficile ! Dans un sujet d'écrit, on pourrait reformuler les questions de la manière suivante :*
>
> *3 - Établir l'équation différentielle vérifiée par θ.*
>
> *4 - On pose $\varepsilon = \theta - \theta_\mathrm{e}$ l'écart par rapport à la position d'équilibre. En supposant $\varepsilon \ll 1$, en déduire l'équation différentielle linéarisée vérifiée par ε, puis donner la période des petites oscillations du système autour de sa position d'équilibre.*