



BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

Révisions R8

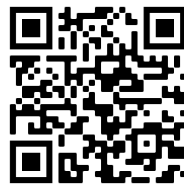
Particules chargées

Ressources en ligne

Scanner ou cliquer sur les QR-code pour accéder aux ressources.



Cartes mémo, réalisées par C. Cayssiols.



Vidéos, réalisées par JJ. Fleck.
Les vidéos « l'essentiel » et « démonstrations principales » sont très adaptées à des révisions.



QCM d'applications.
Choisir d'abord le mode « j'apprends » puis éventuellement le mode « je révise ».

Les deux dernières ressources correspondent au programme de PCSI, un peu plus vaste que celui de PTSI : me demander en cas de doute sur ce que vous devez savoir ou pas.

Rappels de cours

Considérons une particule de masse m , charge q , évoluant dans un champ électromagnétique que l'on suppose en général uniforme et constant.

A - Force de Lorentz

- **Expression** : $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.
- **Effet sur le mouvement** :
 - ▷ composante électrique $q\vec{E}$: puissance $q\vec{E} \cdot \vec{v}$ a priori non nulle, donc un champ \vec{E} peut accélérer, freiner et dévier la particule ;
 - ▷ composante magnétique $q\vec{v} \wedge \vec{B}$: puissance nulle car $\vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{B}$, donc un champ \vec{B} ne peut que dévier une particule mais pas modifier la norme de sa vitesse.
- **Poids** des particules microscopiques (électrons, protons, etc.) toujours négligeable devant la force de Lorentz.

B - Mouvement dans un champ électrique seul

- **Hypothèse** : champ $\vec{E} = E\vec{e}_z$ uniforme, mais $\vec{B} = \vec{0}$.
- **Nature des trajectoires** : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} = c\vec{e}$
↪ analogue à une chute libre, donc trajectoires paraboliques.
- **Énergie potentielle électrostatique** :

$$\delta W = q\vec{E} \cdot d\vec{M} = -q \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{M} = -\overrightarrow{\text{grad}}(qV) \cdot d\vec{M} = -d(qV)$$

La force de Lorentz électrique dérive de l'énergie potentielle électrostatique, reliée au potentiel électrostatique V par

$$E_{pe} = qV.$$

• **Mouvement d'une charge accélérée par une différence de potentiel** : Considérons un système de deux électrodes planes parallèles (type condensateur), distantes de L le long de l'axe (Oz), soumises à une tension $U = V(0) - V(L)$. Une particule de charge q est lâchée sans vitesse de l'électrode située en $z = 0$, on souhaite qu'elle atteigne la deuxième.

- ▷ La particule se dirige vers l'électrode qui minimise son énergie potentielle qV (résultat très général sur l'énergie potentielle), c'est-à-dire vers l'électrode de haut potentiel si $q < 0$ et celle de bas potentiel si $q > 0$. On peut en déduire le signe de U requis pour que la charge atteigne la deuxième électrode.
- ▷ Pour trouver la vitesse à laquelle l'électrode est atteinte, c'est-à-dire la vitesse à un endroit donné, peu importe l'instant auquel cet endroit est atteint, un raisonnement énergétique est tout adapté. Par conservation de l'énergie mécanique,

$$E_m \underset{z=0}{=} 0 + qV(z=0) \underset{z=L}{=} \frac{1}{2} m v(z=L)^2 + qV(z=L)$$

ce qui donne

$$v(z=L) = \sqrt{\frac{2q}{m} (V(z=0) - V(z=L))} \quad \text{soit} \quad \boxed{v(z=L) = \sqrt{\frac{2qU}{m}}}$$

C - Mouvement dans un champ magnétique seul : mouvement cyclotron

• Hypothèses :

- ▷ champ uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$ uniforme mais $\vec{E} = \vec{0}$;
- ▷ vitesse initiale \vec{v}_0 supposée orthogonale à \vec{B} , c'est-à-dire incluse dans le plan (Oxy).

↪ le mouvement de la particule dans ces conditions est appelé **mouvement cyclotron**, et les paramètres caractéristiques de ce mouvement sont les **paramètres cyclotron**.

*** **Attention !** Il n'y a pas de plan d'étude unique pour le mouvement cyclotron, les différents paramètres peuvent être déterminés dans un ordre quelconque. Il faut donc toujours chercher à faire apparaître dès le début du calcul les grandeurs demandées par l'énoncé.

• Le mouvement est uniforme : d'après le théorème de l'énergie cinétique,

$$\frac{dE_c}{dt} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{donc} \quad E_c = \text{cte} \quad \text{d'où} \quad v = \|\vec{v}\| = \text{cte} = v_0.$$

• Le mouvement est plan : puisque $\vec{B} = B\vec{e}_z$, alors la force de Lorentz $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est orthogonale à \vec{e}_z , et projeter le PFD sur l'axe \vec{e}_z conduit à

$$m \frac{dv_z}{dt} = 0 \quad \text{donc} \quad v_z = \text{cte} \underset{\text{CI}}{=} 0 \quad \text{d'où} \quad z = \text{cte}.$$

• Nature de la trajectoire : montrons que la trajectoire cyclotron est un cercle.

- ▷ *Repérage* : le plus simple est de se placer dans le repère de Frénet, dont on rappelle que les vecteurs de base sont \vec{t} , tangent à la trajectoire, et \vec{n} , normal à la trajectoire dirigé vers l'intérieur de la courbure. En toute généralité, les vecteurs cinématiques s'écrivent alors

$$\vec{v} = v \vec{t} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + \frac{v^2}{R} \vec{n},$$

avec R le rayon de courbure de la trajectoire, qui peut a priori dépendre du temps.

- ▷ *Bilan des forces* : seule entre en jeu la force de Lorentz magnétique $\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, qu'il faut projeter dans la base de Frénet.

→ compte tenu du produit vectoriel, \vec{F}_L est orthogonale à \vec{v} donc portée par $\pm \vec{n}$;

→ mais comme il s'agit de la seule force à même de dévier la particule chargée, elle est donc forcément dirigée vers l'intérieur de la trajectoire, c'est-à-dire portée par $+\vec{n}$, comme le montre la figure 1 ;

→ pour ne pas alourdir les écritures avec le signe de q , le plus simple est d'utiliser une valeur absolue,

$$\vec{F}_L = |q| v B \vec{n}.$$

Posons pour une fois pour toutes le calcul avec les signes, afin de se convaincre de la validité de l'expression donnée ci-dessus. On constate sur la figure 1 que la base de Frénet change en fonction du signe de q ... ce qui demande d'être attentif en exprimant le produit vectoriel.

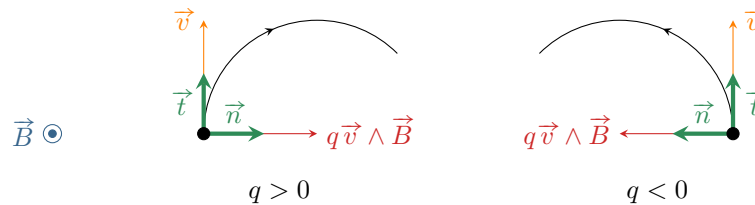


Figure 1 – Sens de la force de Lorentz. Connaissant la vitesse \vec{v} et le signe de q , on construit la force de Lorentz, puis on en déduit le sens dans lequel est déviée la particule soumise à cette force uniquement. Connaissant l’allure de la trajectoire, on peut ensuite dessiner la base de Frénet. Ces schémas permettent de se convaincre et/ou de retrouver que la force de Lorentz est toujours portée par le vecteur unitaire normal \vec{n} de la base de Frénet.

▷ si $q < 0$, alors la base $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{e}_z)$ est directe et il n’y a pas particulièrement de complication :

$$qv \vec{t} \wedge B \vec{e}_z = qvB \underbrace{\vec{t} \wedge \vec{e}_z}_{\substack{\text{vecteurs de base} \\ \text{dans le mauvais ordre}}} = qvB (-\vec{n}) = +|q|vB \vec{n}$$

▷ en revanche si $q > 0$ alors la base directe s’écrit $(\vec{t}, \vec{n}, -\vec{e}_z)$, donc

$$qv \vec{t} \wedge B \vec{e}_z = -qvB \underbrace{\vec{t} \wedge (-\vec{e}_z)}_{\substack{\text{vecteurs de base} \\ \text{dans le mauvais ordre}}} = -qvB (-\vec{n}) = qvB \vec{n} = |q|vB \vec{n}.$$

▷ Application du PFD :

$$m \frac{dv}{dt} \vec{t} + m \frac{v^2}{R} \vec{n} = |q|vB \vec{n}.$$

Le projection sur \vec{t} permet de retrouver que le mouvement est uniforme ($v = v_0 = \text{cte}$), sans passer par l’énergie cinétique. La projection sur \vec{n} conduit à

$$R = \frac{mv}{|q|B}.$$

Le rayon de courbure étant constant, la trajectoire est un cercle.

Attention toutefois, le sens de parcours du cercle dépend du signe de la charge. Imaginons que la particule passe en un point de sa trajectoire avec une vitesse \vec{v} . En reprenant les mêmes schémas de la figure 1, on conclut qu’une particule de charge positive parcourt la trajectoire en sens horaire et une particule de charge négative en sens trigonométrique.

La trajectoire cyclotron est un cercle
de rayon $R_c = \frac{mv_0}{|q|B}$ appelé **rayon cyclotron**
dont le sens de parcours dépend du signe de la charge.

• **Retrouver le rayon cyclotron en coordonnées polaires**

La nature circulaire du mouvement permet d’utiliser les coordonnées polaires, sans doute plus familières que la base de Frénet (mais qui ne dispensent pas des discussions physiques sur le signe de q et le sens de déviation de la particule ...). Il arrive que les énoncés admettent d’emblée la nature circulaire du mouvement pour travailler uniquement avec les coordonnées polaires.

▷ Repérage :

$$\vec{OM} = R_c \vec{e}_r \quad \vec{v} = R_c \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \vec{a} = -R_c \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -\frac{v_0^2}{R_c} \vec{e}_r.$$

En effet, le mouvement est circulaire, donc $r = R_c = \text{cte}$, et uniforme donc $\dot{\theta} = \text{cte}$ et $v = v_0 = \text{cte}$.

▷ Bilan des forces :

$$\vec{F}_L = qR_c \dot{\theta} \vec{e}_\theta \wedge B \vec{e}_z = qR_c B \dot{\theta} \vec{e}_r = -|q|v_0 B \vec{e}_r$$

en utilisant comme précédemment une valeur absolue pour ne pas avoir à distinguer selon le signe de q et le fait que la force de Lorentz est forcément dirigée selon $-\vec{e}_r$, car c’est la seule à pouvoir dévier la particule.

▷ Application du PFD :

$$-m \frac{v_0^2}{R_c} \vec{e}_r = -|q|v_0 B \vec{e}_r \quad \text{d'où} \quad R_c = \frac{mv_0}{|q|B}.$$

• Période et pulsation cyclotron

La pulsation cyclotron ω_c est la vitesse angulaire à laquelle la particule parcourt sa trajectoire : $\omega_c = |\dot{\theta}|$. La période cyclotron T_c , le rayon cyclotron, la pulsation cyclotron et la vitesse v_0 sont reliés par les relations classique d'un mouvement circulaire uniforme :

$$v_0 = \frac{2\pi R_c}{T_c} \quad v_0 = R_c \omega_c \quad \omega_c = \frac{2\pi}{T_c} \quad \text{etc.}$$

On dispose donc de *quatre* paramètres pour décrire le mouvement cyclotron, dont seulement *deux* sont indépendants. Une grandeur caractéristique du mouvement souvent utilisée est la pulsation cyclotron,

$$\omega_c = \frac{v_0}{R_c} = \frac{|q|B}{m}$$

... mais il est possible d'exprimer ω_c directement avec le PFD en coordonnées polaires, même sans connaître l'expression du rayon cyclotron. Faites-le pour vous entraîner : il suffit de privilégier $\dot{\theta}$ dans le calcul.



La trajectoire cyclotron est parcourue à la vitesse angulaire $\omega_c = |\dot{\theta}| = \frac{|q|B}{m}$.

Questions de cours

Seuls les étudiants du groupe de TD PT seront interrogés en colle sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !*

R8.1 - On considère un système de deux électrodes planes parallèles (type condensateur) distantes de L le long de l'axe (Oz). Elles sont soumises à une tension $U = V(z=0) - V(z=L)$. Une particule de charge $q > 0$ est lâchée sans vitesse de l'électrode située en $z = 0$, on souhaite qu'elle atteigne la deuxième. Identifier le signe de U pour que ce soit possible. Déterminer la vitesse avec laquelle l'électrode située en $z = L$ est atteinte.

R8.2 - On considère une particule de charge $q < 0$ dans un champ magnétostatique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$. On admet que sa trajectoire est un cercle parcouru en sens trigonométrique. Montrer que le mouvement est uniforme. Définir et déterminer le rayon et la pulsation cyclotron.

L'étudiant(e) pourra utiliser au choix la base de Frénet (qui donne directement l'uniformité et le rayon cyclotron) ou le théorème de l'énergie cinétique (uniformité) et la base polaire (rayon cyclotron).

Pour s'entraîner

- Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
- Difficulté technique et calculatoire ;
- Exercice important.

Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé



Exercice 1 : Cavité accélératrice d'électrons

2 | 2



▷ *Mouvement dans un champ électrique.*

Les accélérateurs de particules, tels que le synchrotron SOLEIL à Saclay (schéma figure 2 partie gauche) ou l'ESRF à Grenoble, permettent d'explorer la structure de la matière à l'échelle du nanomètre, avec de nombreuses applications en physique, chimie, biologie, et technologie. Ces infrastructures produisent des faisceaux d'ondes électromagnétiques de forte intensité parfaitement contrôlés qui irradient les échantillons étudiés. Pour produire ce rayonnement, des électrons sont accélérés jusqu'à une vitesse de $0,9999c$ avant d'être injectés sur un anneau de stockage où ils suivent une trajectoire quasi-circulaire.

On s'intéresse dans cet exercice à une première étape d'accélération des électrons (masse m , charge $-e$), injectés dans une cavité linéaire de longueur d avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$, voir figure 2 partie droite. Cette cavité est formée par deux plaques entre lesquelles est imposée une tension U , ce qui crée un champ électrique uniforme $\vec{E} = -E_0\vec{e}_x$. La vitesse des électrons est alors suffisamment faible pour pouvoir les traiter sans faire appel à la théorie de la relativité.

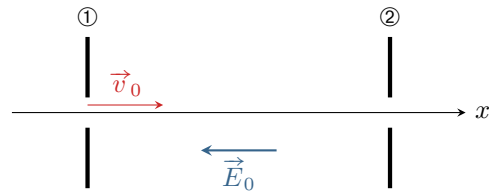
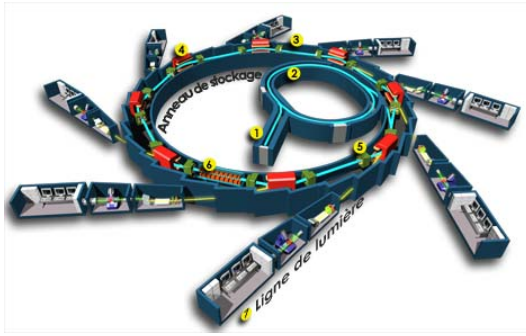


Figure 2 – Cavité accélératrice d’un synchrotron. La cavité accélératrice étudiée, schématisée à droite, correspond à la partie à de l’installation, schématisée à gauche.

1 -  tablir l’expression de E_0 en fonction de U et d . Dans quel sens la tension U doit-elle être appliquée ? On note pour la suite

$$\vec{E} = -\frac{m}{e}\alpha\vec{e}_x$$

où α est une constante quantifiant l’intensité du champ. Donner son expression en fonction des autres grandeurs pertinentes.

2 - En négligeant toute autre force que la force électrique, déterminer la vitesse v_1 à laquelle l’électron sort de la cavité en fonction de v_0 , α et d .

3 - En déduire le temps de vol dans la cavité t_1 , et donner une interprétation physique de α .

En réalité, l’électron perd de l’énergie par rayonnement, ce qui modifie son mouvement dans la cavité. On cherche les nouvelles expressions de v'_1 et t'_1 prenant cet effet en compte. La puissance perdue par rayonnement est donnée par la formule de Larmor, proportionnelle au carré de l’accélération a' de l’électron :

$$\mathcal{P} = m\tau a'^2 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{e^2}{6\pi m\epsilon_0 c^3}.$$

4 - Déterminer la dimension de τ .

En pratique, $\tau \ll t_1$: on peut donc travailler au premier ordre en τ , c’est-à-dire négliger tous les termes de la forme τ^n dès que $n \geq 2$. Dans cette approximation, on a alors $t'_1 - t_1 \simeq k_t\tau$ et $a' - \alpha \simeq k_a\tau$, avec k_t et k_a deux constantes (développements limités au premier ordre).

5 - Exprimer au premier ordre en τ l’énergie perdue par l’électron lors de son parcours dans la cavité.

6 - En déduire l’expression de la vitesse de sortie sous la forme

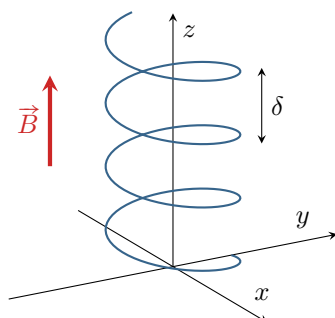
$$v'_1 = v_1 - \xi\tau.$$

On utilisera le développement limité $(1 + \epsilon)^n \simeq 1 + n\epsilon$ pour $|\epsilon| \ll 1$.

Exercice 2 : Mouvement cyclotron hélicoïdal



- \triangleright Mouvement dans un champ magnétique ;
- \triangleright Coordonnées cylindriques.



On s’intéresse au mouvement d’une particule de charge $q > 0$ dans un champ magnétique \vec{B} uniforme lorsque la vitesse initiale \vec{v}_0 de la particule forme un angle α avec la direction de \vec{B} . Le mouvement de la particule est alors hélicoïdal.

L’étude est menée dans un référentiel \mathcal{R} supposé galiléen. On définit l’axe (Oz) dans la direction et le sens de \vec{B} , et l’axe (Ox) dans la direction et le sens de la projection de \vec{v}_0 dans le plan orthogonal à \vec{B} . La particule se trouve initialement en un point de l’axe (Oy) . On travaille par la suite avec un système de coordonnées cylindriques d’axe (Oz) , dans lequel la nature hélicoïdale du mouvement se traduit par $r = R = \text{cte}$.

1 - Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération de la particule dans la base cylindrique.

2 -  tablir les équations du mouvement.

- 3 - Montrer que le mouvement de la particule se fait à vitesse angulaire constante. Exprimer la pulsation cyclotron.
- 4 - Déterminer le rayon R de la trajectoire, en fonction notamment de $v_0 = \|\vec{v}_0\|$ et α .
- 5 - Exprimer en fonction de R et α le pas δ de l'hélice, c'est-à-dire la distance dont la particule se déplace le long de l'axe (Oz) lorsqu'elle parcourt un cercle complet en projection dans le plan (Oxy).

 **Correction** — 1 - Par définition,

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

puis par dérivation

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

Question d'analyse 1 - Justifier la présence de $\dot{\theta}$ dans l'expression de la composante v_θ . Pourquoi n'apparaît-il pas dans l'expression de la composante v_z ?

Question d'analyse 2 - Justifier la présence du signe $-$ dans l'expression de la composante a_r .

2 - Étudions le mouvement de la particule dans le référentiel \mathcal{R} . Elle subit la force de Lorentz,

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qRB\dot{\theta}\vec{e}_r.$$

Le PFD donne alors les trois équations du mouvement par projection dans la base polaire,

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = qRB\dot{\theta} \\ mR\ddot{\theta} = 0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Question d'analyse 3 - Justifier l'expression de la force de Lorentz.

Question d'analyse 4 - Pourquoi le poids de la particule n'apparaît-il pas dans le PFD ?

3 - D'après la deuxième équation issue du PFD,

$$\ddot{\theta} = 0 \quad \text{donc} \quad \dot{\theta} = \text{cte.}$$

La pulsation cyclotron est par définition la valeur absolue de la vitesse angulaire de la particule. La première équation donne alors

$$\dot{\theta} = -\frac{qB}{m} \quad \text{d'où} \quad \omega_c = |\dot{\theta}| = \frac{qB}{m}.$$

Question d'analyse 5 - Quel est le signe de $\dot{\theta}$? Comment ce signe se manifeste-t-il sur l'allure de la trajectoire ?

4 - Le repère est construit tel que

$$\vec{v}_0 = v_0 \sin \alpha \vec{e}_x + v_0 \cos \alpha \vec{e}_z$$

Question d'analyse 6 - En s'appuyant sur un ou deux schéma(s), justifier l'expression de \vec{v}_0 : présence du sin et du cos, absence de composante sur \vec{e}_y .

De plus, à l'instant initial, la particule se trouve sur l'axe (Oy) : on a donc à cet instant

$$\vec{e}_r = \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{e}_\theta = -\vec{e}_x.$$

Question d'analyse 7 - Justifier à l'aide d'un schéma ce lien entre les deux bases.

Question d'analyse 8 - Ces expressions demeurent-elles valables lorsque $t \neq 0$?

On identifie donc

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{base}}}{R\dot{\theta}}(-\vec{e}_x) + \dot{z}\vec{e}_z = R\omega_c\vec{e}_x + \dot{z}\vec{e}_z \\ &= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{v_0 \sin \alpha}\vec{e}_x + v_0 \cos \alpha \vec{e}_z \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$R\omega_c = v_0 \sin \alpha \quad \text{donc} \quad R = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c} = \frac{mv_0 \sin \alpha}{qB}.$$

Question d'analyse 9 - Justifier la disparition du signe – devant \vec{e}_x dans l'expression de \vec{v}_0 légendée « base ».

5 - Par définition de la vitesse angulaire, la particule parcourt un cercle en projection dans le plan (Oxy) au bout d'une durée T telle que

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} \quad \text{soit} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_c}.$$

Par ailleurs, d'après les questions précédentes,

$$\dot{z} = v_0 \cos \alpha.$$

Question d'analyse 10 - Établir explicitement l'expression de \dot{z} .

Ainsi, pendant la durée T , la coordonnée z augmente de $\dot{z}T$, d'où

$$\delta = v_0 \cos \alpha \times \frac{2\pi}{\omega_c} = 2\pi \cos \alpha \frac{R}{\sin \alpha} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\delta = \frac{2\pi R}{\tan \alpha}}.$$

Question d'analyse 11 - Expliquer comment apparaît le terme $R/\sin \alpha$ dans le calcul.

Exercice 3 : Étude du mouvement cyclotron en coordonnées cartésiennes



- ▷ Mouvement cyclotron ;
- ▷ Coordonnées cartésiennes.

Cet exercice a pour objectif d'étudier le mouvement cyclotron directement en coordonnées cartésiennes, et de montrer que la trajectoire associée est circulaire. Nous utiliserons pour cela une méthode astucieuse permettant de raccourcir notablement les calculs.

Considérons une particule de masse m et charge q en mouvement dans un référentiel \mathcal{R} galiléen. Elle est soumise à un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$. À l'instant $t = 0$, elle se trouve à l'origine O du repère avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ orthogonale à \vec{B} .

- 1 - Établir les équations du mouvement de la particule en coordonnées cartésiennes.
- 2 - En déduire que le mouvement de la particule est plan.

Pour toute la suite, on se place uniquement dans le plan de la trajectoire et on introduit deux variables complexes de position et de vitesse,

$$\underline{X} = x + iy \quad \text{et} \quad \underline{V} = \frac{d\underline{X}}{dt} = v_x + iv_y.$$

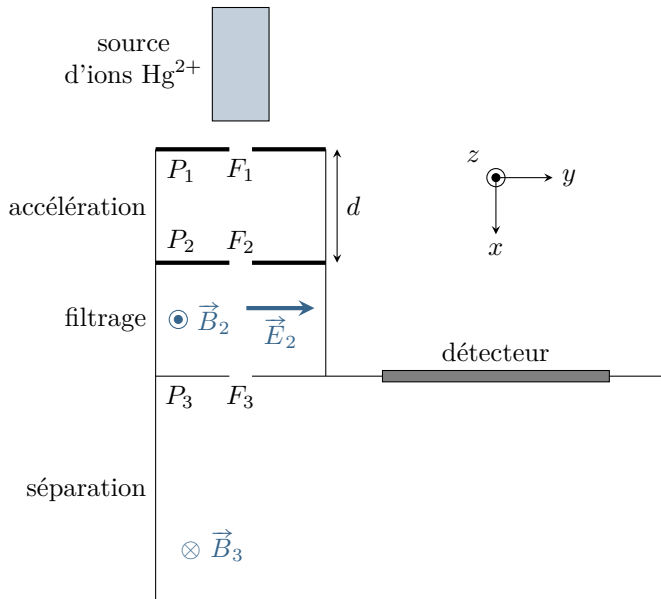
- 3 - Montrer que \underline{V} est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d\underline{V}}{dt} + i\frac{qB}{m}\underline{V} = 0.$$

- 4 - En déduire les expressions de \underline{V} puis de \underline{X} .
- 5 - Déterminer les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de la particule, et montrer qu'elles vérifient l'équation d'un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- 6 - Représenter l'allure de la trajectoire en fonction du signe de q .

Exercice 4 : Spectrométrie de masse

- ▷ Mouvement dans un champ électrique ;
 ▷ Mouvement cyclotron.



Un spectromètre de masse est un appareil qui permet de mesurer la masse ou la charge d'un ion (plus précisément le rapport entre les deux). De nombreuses technologies de spectromètre de masse existent : nous étudions ici le principe d'un spectromètre dit « à secteur magnétique ».

Dans le dispositif étudié ici, une source émet des ions mercure ${}^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ et ${}^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$. Les deux ions ont la même charge, mais leur masse diffère : c'est donc elle que le spectromètre permet de déterminer. Ces ions entrent dans le spectromètre de masse par la fente F_1 . Le spectromètre se compose de trois étages d'accélération, filtrage en vitesse puis séparation des ions. Une barrette de capteurs de charge est placée dans la chambre de séparation. On mesure ainsi la charge ayant impacté chaque point du détecteur en fonction de son abscisse y .

Par convention, on note sans indice les grandeurs relatives à un ion quelconque et on l'indice par le nombre de masse lorsqu'il est important pour les valeurs numériques : par exemple m (pour un calcul littéral) et m_{200} ou m_{202} pour les applications numériques.

A - Accélération des ions

Un ion mercure, de masse m et charge $2e$ entre dans le spectromètre par la fente F_1 . On néglige sa vitesse initiale. Une tension U appliquée entre les plaques P_1 et P_2 séparées de d permet de l'accélérer jusqu'à la fente F_2 .

- 1 - Quelle doit être la plaque de potentiel le plus élevé pour que l'ion soit effectivement accéléré ?
- 2 - Établir l'expression littérale de la vitesse v de l'ion lorsqu'il atteint la plaque P_2 .
- 3 - On trouve numériquement des vitesses valant $1,38 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $1,39 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Pourquoi pouvait-on s'attendre à un écart aussi faible ?

B - Filtrage en vitesse

Comme l'hypothèse de vitesse initiale nulle en F_1 est difficile à réaliser en pratique, la vitesse des ions en F_2 présente une certaine dispersion. Pour améliorer la précision de l'appareil, un filtrage en vitesse est alors réalisé. Le dispositif est réglé tel que, dans la chambre de filtrage située entre P_2 et P_3 , il règne un champ électromagnétique uniforme composé d'un champ électrique $\vec{E}_2 = E_2 \vec{e}_y$ et d'un champ magnétique $\vec{B}_2 = B_2 \vec{e}_z$. On suit un ion qui traverse la plaque P_2 par la fente F_2 avec une vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_x$.

- 4 - À quelle condition sur les forces qu'il subit l'ion peut-il avoir un mouvement rectiligne l'amenant de F_2 à F_3 ?
- 5 - En déduire que seuls les ions de vitesse $v = v_0 = E_2/B_2$ parviennent en F_3 .
- 6 - Numériquement, $v_0 = 1,38 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. En déduire quel isotope du mercure parvient en F_3 avec ces réglages.

C - Séparation des ions

Pour mesurer la composition isotopique du mercure, on règle la valeur de E_2 pour permettre le passage de l'isotope 200 pendant une minute puis on change sa valeur pour que l'isotope 202 passe pendant une minute. La valeur de B_2 reste constante tout au long de l'opération.

Une fois sorti de la zone de filtrage par la fente F_3 avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$, l'ion pénètre dans une région où il ne règne qu'un champ magnétique uniforme $\vec{B}_3 = -B_3 \vec{e}_z$ valant 200 mT. Ce champ magnétique donne à l'ion une trajectoire qu'on admet être circulaire, et après avoir parcouru un demi tour il atteint le détecteur en un point d'abscisse y .

- 7 - Montrer que le mouvement de l'ion dans cette région est uniforme.
- 8 - Déterminer littéralement le rayon R de la trajectoire de l'ion.

9 - Numériquement, on trouve respectivement 71,8 cm et 72,5 cm pour les deux isotopes. En déduire les abscisses y_{200} et y_{202} des points d'impact de chaque type d'ion sur le détecteur, l'origine $y = 0$ étant prise au centre de la fente F_3 .

10 - Les charges totales accumulées valent respectivement $Q_1 = 3,85 \cdot 10^{-8}$ C pour la plus petite valeur de y et $Q_2 = 1,15 \cdot 10^{-8}$ C pour la plus élevée. En déduire la composition isotopique des ions émis par la source.

Exercice 5 : Cyclotron

inspiré CCP PC 2014 et oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2



- ▷ Mouvement dans un champ électrique ;
- ▷ Mouvement cyclotron.

Un cyclotron est formé de deux enceintes demi-cylindriques D_1 et D_2 , appelées « dees » en anglais, séparées d'une zone étroite d'épaisseur a . Les dees sont situés dans l'entrefer d'un électroaimant qui fournit un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$, de norme $B = 1,5$ T. Une tension harmonique u d'amplitude $U_m = 200$ kV est appliquée entre les deux extrémités de la bande intermédiaire, si bien qu'il y règne un champ électrique orienté selon \vec{e}_x .

On injecte des protons au sein de la zone intermédiaire avec une vitesse initiale négligeable.

Données : masse d'un proton $m = 1,7 \cdot 10^{-27}$ kg.

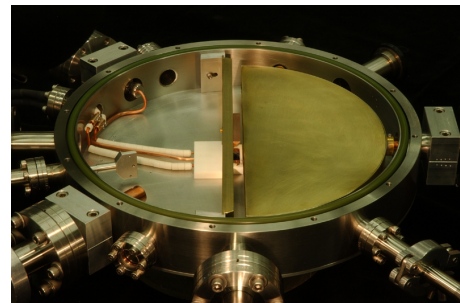
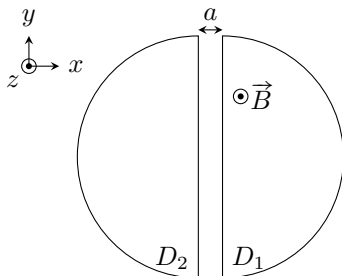


Figure 3 – Étude d'un cyclotron. Schéma de principe et photo du cyclotron de l'université de Rutgers, qui mesure une trentaine de centimètres de diamètre.

- 1 - Montrer qu'à l'intérieur d'un dee la norme de la vitesse des protons est constante.
- 2 - En déduire le rayon de courbure R de la trajectoire des protons ayant une vitesse v ainsi que le temps que passe un proton dans un dee.
- 3 - Quelle doit être la fréquence f de la tension pour que le proton soit accéléré de façon optimale à chaque passage entre les dee ? Pour simplifier, on pourra supposer $a \ll R$. Justifier le choix d'une tension harmonique au lieu, par exemple, d'une tension crête-à-crête.
- 4 - Exprimer en fonction de n la vitesse v_n puis le rayon R_n de la trajectoire d'un proton après n passages dans la zone d'accélération. Le demi-cercle $n = 1$ est celui qui suit la première phase d'accélération.
- 5 - Calculer numériquement le rayon de la trajectoire après un tour (donc un passage dans chaque dee), puis après dix tours.

Le rayon de la dernière trajectoire décrite par les protons accélérés avant de bombarder une cible est $R_N = 35$ cm.

- 6 - Déterminer l'énergie cinétique du proton avant le choc contre la cible proche du cyclotron puis le nombre de tours parcourus par le proton.

Exercice 6 : Mouvement dans des champs E et B croisés

💡 3 | ✂ 2



- ▷ Mouvement dans un champ électrique ;
- ▷ Mouvement dans un champ magnétique ;
- ▷ Coordonnées cartésiennes.

Considérons une particule de masse m et charge $q > 0$, se trouvant initialement sans vitesse au point origine du repère. Cette particule est soumise aux champs $\vec{E} = E\vec{e}_y$ et $\vec{B} = B\vec{e}_z$. On pose $\omega = qB/m$.

- 1 - Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la particule et montrer que son mouvement est plan.
- 2 - Établir une équation différentielle portant sur la composante v_y de la vitesse de la particule. La résoudre en faisant apparaître une constante λ .

- 3 - En déduire l'expression de la composante v_x et déterminer λ .
- 4 - Déterminer la vitesse de dérive $\vec{v}_d = \langle \vec{v} \rangle$, définie comme la vitesse moyenne de la particule. En quoi ce résultat est-il paradoxal ?
- 5 - Exprimer les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de la particule.
- 6 - La trajectoire de la particule est une cycloïde, représentée figure 4. Déterminer ses paramètres géométriques a et b . Étudier les instants auxquels y est extrême, et expliquer la différence d'allure en ces points.

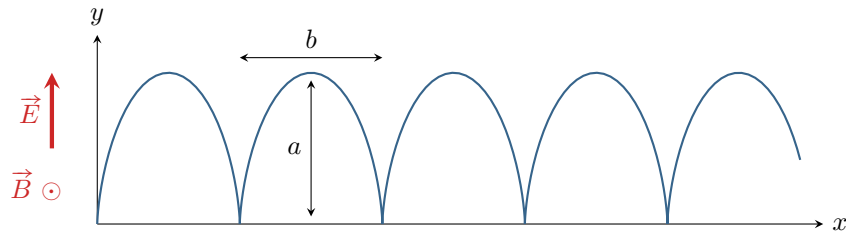


Figure 4 – Trajectoire de la particule dans deux champs croisés.