BLAISE PASCAL
PT 2019-2020

Révisions – Bloc 1

Lois de la mécanique

Année	Chapitre	Ce qu'il faut réviser	Support	Prioritaire	☺
PTSI	Cinématique	Coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques	Livret outils p. 18	**	
PTSI	Cinématique	Retrouver les expression de v et a en cylindriques (D)		*	
PTSI	Dynamique	Forces usuelles : ressort, Lorentz, frottement linéaire ou quadratique, gravitation, Coulomb (R)		*	
PTSI	Dynamique	Exemples fondamentaux : chute libre, pendule simple, oscillateur harmonique (D)			
PTSI	Énergie mécanique	Énergies potentielles usuelles : pesanteur, gravitation, Coulomb (R)			
PTSI	Énergie mécanique	Utiliser la conservation de l'énergie mécanique (M)	DM 1 + révisions ex 1		
PTSI	Moment cinétique	Théorème du moment cinétique (M)	DM 13 + révisions ex 2		
PTSI		Choisir le théorème de mécanique adapté à la question posée (M)	Fiche de révisions		
PTSI	Forces centrales	Cas d'une trajectoire circulaire dans un champ de force central : retrouver l'expression de la vitesse et les lois de Kepler (D)			

Plan de la fiche

I - Ressources en ligne

Scanner ou cliquer sur les QR-code pour accéder aux ressources.

- **L'essentiel du cours sous forme de cartes mémo :** cartes réalisées par Christophe Cayssiols.

Cartes utilisables pour ce bloc de révisions : toutes celles de mécanique de première année, hormis les particules chargées que nous réviserons ultérieurement.

- **Qmax : QCM d'applications directes du cours**

Choisir d'abord le mode « j'apprends » puis éventuellement le mode « je révise ». Ces QCM correspondent au programme de PCSI, certaines notions peuvent donc vous être inconnues : me demander en cas de doute.

Thèmes abordés dans ce bloc de révisions : tout le thème « mécanique ».

II - Rappels de cours

II.1 - Principe fondamental de la dynamique

- **Autre nom :** seconde loi de Newton.
- **Hypothèses :** point matériel M + référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
- **Mathématiquement :**

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{M/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^{N} \vec{F}_n} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \vec{p}_{M/\mathcal{R}} = m\vec{v}_{M/\mathcal{R}} \\ \vec{F}_n \text{ force exercée sur le point matériel } M. \end{cases}.$$

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère :**
  - ▷ si toutes les forces sont connues, on obtient l'équation différentielle vectorielle vérifiée par $\vec{v}$;
  - ▷ si la vitesse $\vec{v}_M(t)$ est connue à tout instant, on peut en déduire l'expression des forces inconnues, en particulier les forces de liaison (tension d'un fil, réaction du support).
- **Remarques :**
  - ▷ il n'y a pas d'intérieur pour un point matériel, donc parler de force extérieure n'a pas de sens ;
  - ▷ toutes les autres lois données ici sont des conséquences du PFD ; les seuls postulats de la mécanique newtonienne sont les trois lois de Newton : le principe d'inertie (qui postule l'existence des référentiels galiléens), le principe fondamental de la dynamique et le principe des actions réciproques.

II.2 - Théorème de la résultante cinétique

- **Autres noms :** loi de la quantité de mouvement, théorème du centre d'inertie.
- **Hypothèses :** solide indéformable $\mathcal{S}$ + référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
- **Mathématiquement :**

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^{N} \vec{F}_n} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \vec{p}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = m\vec{v}_{G/\mathcal{R}} \\ \vec{F}_n \text{ force } \textbf{extérieure} \text{ exercée sur le solide } \mathcal{S}. \end{cases}.$$

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère :**
  - ▷ si toutes les forces sont connues, on obtient l'équation différentielle vectorielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}_G$ du centre de masse G du solide indéformable $\mathcal{S}$; en revanche, le TRC n'apporte aucune information sur le mouvement des autres points du solide ;
  - ▷ si la vitesse $\vec{v}_G(t)$ est connue à tout instant, on peut en déduire l'expression des forces inconnues, en particulier les forces de liaison (tension d'un fil, réaction du support) et les forces exercées par des dispositifs d'asservissement (p.ex. si on impose au système une vitesse constante).
- **Remarque :** on vous pardonnera l'abus de langage consistant à appeler « PFD » le TRC.

II.3 - Théorème du moment cinétique vectoriel

- **Hypothèses :** point matériel M + référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
- **Mathématiquement :**

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{A,M/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^{N} \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_n)} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} A \text{ un point } \textbf{fixe} \text{ dans } \mathcal{R} \\ \vec{L}_{A,M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}_{M/\mathcal{R}} \\ \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_n) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}_n \end{cases}$$

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère :**
  - ▷ si toutes les forces sont connues, on obtient l'équation différentielle vectorielle vérifiée par $\vec{v}$ ... le TMC apporte donc exactement la même information que le PFD, qui est souvent plus simple à utiliser : il sert très peu en tant que tel ;
  - ▷ l'utilisation la plus classique est le cas de conservation : si la somme des moments des forces est nulle, alors $\vec{L}_{A,M/\mathcal{R}}$ est constant, et donc le mouvement est plan car $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{L}_{A,M/\mathcal{R}}$.

- **Remarques :**
  - ▷ Dans une écriture abrégée, on peut très vite ne plus préciser M et $\mathcal{R}$, en revanche il faut toujours garder dans les écritures le point par rapport auquel les moments sont calculés. L'écriture la plus compacte possible est donc $\vec{L}_A$.
  - ▷ Il existe une version du TMC vectoriel pour un solide, utilisant la matrice d'inertie : elle est au programme de SI mais pas de physique.

II.4 - Théorème du moment cinétique scalaire

- **Hypothèses :** solide indéformable $\mathcal{S}$ ou éventuellement point matériel M + référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

- **Mathématiquement :**

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}L_{z,\mathcal{S}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^{N} \mathcal{M}_z(\vec{F}_n)}$$

avec, dans le cas d'un solide en rotation,
  - ▷ $L_{z,M/\mathcal{R}} = J\omega = J\dot\theta$, où J est le moment d'inertie du solide indéformable $\mathcal{S}$ par rapport à l'axe de rotation et $\omega = \dot\theta$ la vitesse angulaire de rotation autour de cet axe ;
  - ▷ $\mathcal{M}_z(\vec{F}) = (\overrightarrow{AM_F} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z$, où A est un point appartenant à l'axe de rotation et M_F le point d'application de la force $\vec{F}$;
  - ▷ $\mathcal{M}_z(\vec{F}) = \pm||\vec{F}||b$, où b est le bras de levier, c'est-à-dire la distance du point d'application M_F à l'axe de rotation, et le signe $\pm$ se détermine qualitativement ($\oplus$ si la force $\vec{F}$ tend à faire tourner le solide en sens trigonométrique autour de l'axe de rotation, $\ominus$ si c'est en sens horaire).

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère :**
  - ▷ si tous les moments sont connus, on obtient l'équation différentielle scalaire vérifiée par la vitesse de rotation $\dot\theta$;
  - ▷ si la vitesse angulaire $\omega(t)$ est connue à tout instant, on peut en déduire l'expression des moments inconnus, en particulier les moments de liaison et ceux exercés par des dispositifs d'asservissement (p.ex. si on impose au système de tourner à vitesse angulaire constante).

- **Remarques :**
  - ▷ calculer un moment par le bras de levier n'est efficace que lorsque le bras de levier est évident, autrement il est plus prudent de passer par les vecteurs et les projections ;
  - ▷ le TMC scalaire est lui aussi rarement utile pour un point matériel ... bien que valable !
  - ▷ le moment vectoriel d'une force est un vecteur, le moment scalaire est ... un scalaire ! Attention aux flèches dans vos copies.

II.5 - Théorème de l'énergie cinétique : version instantanée

- **Autre nom :** théorème de la puissance cinétique.

- **Hypothèses :** point matériel M ou solide indéformable $\mathcal{S}$ + référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

- **Mathématiquement :**

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c},\mathcal{S}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^{N} \mathcal{P}_n}$$

Les expressions de l'énergie cinétique et des puissances diffèrent selon le mouvement du solide :
  - ▷ pour une translation le long d'un axe (Oz),

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}m{v_z}^2 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}_n = \vec{F}_n \cdot \vec{v}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}$$

  - ▷ pour une rotation autour d'un axe (Oz),

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}J\dot\theta^2 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}_n = \mathcal{M}_z(\vec{F}_n)\,\dot\theta$$

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère :**
  - ▷ si toutes les puissances sont connues, on obtient l'équation différentielle scalaire vérifiée par $v = ||\vec{v}||$ (resp. $\dot{\theta}$), mais dans le cas général d'un point matériel elle contient moins d'information que celle issue du PFD (équation vectorielle équivalente à trois équations scalaires) ;
  - ▷ une utilisation très classique est le cas de conservation : si la somme des puissances est nulle, alors E_c et donc v (resp. $\dot{\theta}$) est constante, ce qui signifie que le mouvement est uniforme.

• **Remarques :** le TEC instantané est exactement équivalent au TRC (projeté) pour une translation ou au TMC scalaire pour une rotation, à vous de choisir votre méthode préférée si vous devez établir l'équation différentielle du mouvement.

II.6 - Théorème de l'énergie cinétique : version intégrale

- **Hypothèses :** point matériel M ou solide indéformable $\mathcal{S}$ + référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
- **Mathématiquement :** pour une trajectoire $\widehat{AB}$,

$$\boxed{\Delta E_\mathrm{c} = E_\mathrm{c}(B) - E_\mathrm{c}(A) = \sum_{n=1}^{N} W_n} \qquad \text{avec} \qquad W_n = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}_n \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère :**
  - ▷ si toutes les forces sont connues, on en déduit la valeur de la vitesse $v = ||\vec{v}||$ au point d'arrivée connaissant la vitesse intiale ;
  - ▷ si les vitesses de départ et d'arrivée sont connues, on peut en déduire l'énergie fournie ou prélevée au système par une force inconnue (p.ex. frottements, moteur, freinage, etc.) sans avoir besoin de calculer cette force ;
  - ▷ plus généralement, dès qu'on cherche des informations sur la vitesse en fonction de la position plutôt que du temps, les versions intégrales des théorèmes énergétiques sont bien plus adaptées que tous les théorèmes faisant intervenir des dérivées.

• **Remarques :** le TEC intégral sert assez rarement en pratique, car dans les situations où il serait utile il est presque toujours plus intéressant d'utiliser la conservation de l'énergie mécanique.

II.7 - Théorème de l'énergie mécanique : version instantanée

- **Autre nom :** théorème de la puissance mécanique.
- **Hypothèses :** point matériel M ou solide indéformable $\mathcal{S}$ + référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
- **Mathématiquement :**

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R} = \sum_{n=1}^{N} \mathcal{P}_{n,\mathrm{NC}}\,,}$$

où la somme est cette fois restreinte aux puissances des seules actions mécaniques non conservatives.

L'utilisation la plus courante est le cas de conservation : si le système n'est soumis qu'à des actions mécaniques conservatives ou qui ne travaillent pas (p.ex. réaction normale), alors

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = 0\,.$$

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère :**
  - ▷ dans le cas de mouvements conservatifs à un degré de liberté étudiés en coordonnées polaires (mouvement circulaire), exprimer l'énergie mécanique en fonction des variables $(\theta, \dot{\theta})$ puis la dériver permet d'obtenir l'équation différentielle du mouvement de manière beaucoup plus efficace que le PFD ;
  - ▷ cette méthode peut aussi être utile dans le cas de forces « originales » (p.ex. aimant, van der Waals, etc.) dont seule l'énergie potentielle serait donnée par un énoncé.

II.8 - Théorème de l'énergie mécanique : version intégrale

- **Hypothèses :** point matériel M ou solide indéformable $\mathcal{S}$ + référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
- **Mathématiquement :** pour une trajectoire $\widehat{AB}$,

$$\Delta E_\mathrm{m} = E_\mathrm{m}(B) - E_\mathrm{m}(A) \sum_{n=1}^{N} W_{n,\mathrm{NC}}$$

où la somme est restreinte aux travaux des seules actions mécaniques non conservatives.

La version intégrale du TEM ne sert pratiquement que dans le cas de conservation : si le système n'est soumis qu'à des actions mécaniques conservatives ou qui ne travaillent pas, alors

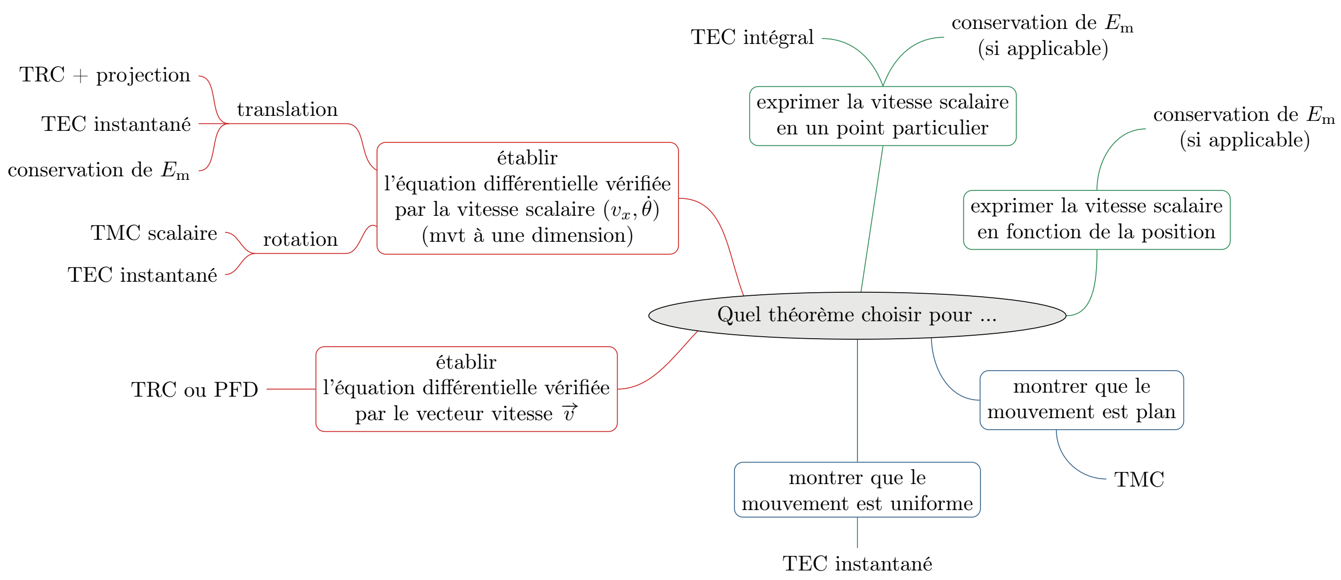
$$E_\mathrm{m} = \mathrm{cte} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall M, \quad E_\mathrm{m}(M) = E_\mathrm{m}(t{=}0)$$

- **Les infos dont on a besoin, celles que l'on récupère :**
  - ▷ les énergies potentielles étant connues en fonction de la position, on en déduit la valeur de la vitesse $v = ||\overrightarrow{v}||$ en n'importe quel point de la trajectoire à partir des conditions initiales ;
  - ▷ plus généralement, dès qu'on cherche des informations sur la vitesse en fonction de la position plutôt que du temps, les versions intégrales des théorèmes énergétiques sont bien plus adaptées que tous les théorèmes faisant intervenir des dérivées.

II.9 - Analogies formelles entre translation et rotation

Translation rectiligne	Rotation autour d'un axe fixe
z direction du mouvement	z axe de rotation
Position z Vitesse $\dot{z}$	Angle θ Vitesse angulaire $\dot\theta$
Masse m Quantité de mouvement $p_z = m\dot{z}$ Composantes des forces $F_{i,z}$	Moment d'inertie J Moment cinétique $L_z = J\dot\theta$ Moments et couples $\mathcal{M}_{z,i}$
Théorème de la résultante cinétique (projeté) : $\dfrac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} = m\ddot{z} = \sum F_{i,z}$	Théorème du moment cinétique (scalaire) : $\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J\ddot\theta = \sum \mathcal{M}_{z,i}$
Puissance d'une force $\mathcal{P} = F_z\dot{z}$ Travail $W = \displaystyle\int_{z_A}^{z_B} F_z \mathrm{d}z$ Énergie cinétique $E_\mathrm{c} = \dfrac{1}{2}m\dot{z}^2$	Puissance d'un moment $\mathcal{P} = \mathcal{M}_z\dot\theta$ Travail $W = \displaystyle\int_{\theta_A}^{\theta_B} \mathcal{M}_z \mathrm{d}\theta$ Énergie cinétique $E_\mathrm{c} = \dfrac{1}{2}J\dot\theta^2$
Théorème de l'énergie cinétique instantané : $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\sum_i \mathcal{P}(F_i)$ ⇝ même équation que le PFD	Théorème de l'énergie cinétique instantané : $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\sum_i \mathcal{P}(\mathcal{M}_i)$ ⇝ même équation que le TMC
Théorème de l'énergie cinétique intégral : $\dfrac{1}{2}mv_B^2 - \dfrac{1}{2}mv_A^2 = \sum_i W(F_i)$	Théorème de l'énergie cinétique intégral : $\dfrac{1}{2}J\dot\theta_B^2 - \dfrac{1}{2}J\dot\theta_A^2 = \sum_i W(\mathcal{M}_i)$

II.10 - Schéma bilan



III - Questions de cours

1 - Énoncer les lois de Newton : principe d'inertie, principe fondamental de la dynamique, principe des actions réciproques.

> **Attention !** *Ne pas se méprendre sur le principe d'inertie : il s'agit d'un postulat d'existence des référentiels galiléens (et d'une définition de cette famille de référentiels) ... mais son but n'est pas de dire ce qui arrive à un point matériel isolé.*

2 - Établir l'expression de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires, d'abord dans le cas particulier d'un mouvement circulaire, puis dans le cas général.

> *Ne pas oublier que* $r = cte \Longrightarrow \dot r = 0$ *et* $\ddot r = 0$ *pour un mouvement circulaire.*

3 - Rappeler **puis ensuite** démontrer l'expression de l'accélération dans le cas particulier d'un mouvement circulaire uniforme et la commenter.

> *On montre que* $\vec a = -\dfrac{v^2}{R}\vec e_r$ *... et il faut le retenir !*
> - *Bien que le mouvement soit uniforme, l'accélération n'est pas nulle !!! En effet, le vecteur vitesse n'est pas constant, seule sa norme l'est.*
> - *Elle est centripète, c'est-à-dire dirigée vers le centre de la trajectoire, ce qui est logique car l'accélération est* toujours *dirigée vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire).*

4 - Établir l'équation de la trajectoire d'un point matériel en chute libre par application du PFD.

5 - Établir l'équation du mouvement d'un pendule simple par application du PFD en coordonnées polaires (**la méthode est imposée**).

6 - Établir l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique masse-ressort en exploitant la conservation de l'énergie mécanique (**la méthode énergétique est imposée**). La résoudre pour des conditions initiales $x(0) = X_0$ et $v(0) = V_0$.

> ***Méthode :*** *Le système est la masse, on choisit le repère tel que la longueur du ressort soit x. Son énergie mécanique s'écrit*
> $$E_m = \frac{1}{2}m\dot x^2 + \frac{1}{2}k(x-\ell_0)^2\,.$$
> *La masse n'est soumise qu'à des forces conservatives ou des forces qui ne travaillent pas, son énergie mécanique est donc constante. On en déduit*
> $$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = m\dot x\ddot x + k(x-\ell_0)\dot x = 0\,,$$
> *ce qui permet de retrouver l'équation du mouvement en simplifiant par $\dot x$.*

Pour trouver les constantes d'intégration, il est plus simple de raisonner sur la solution en cos + sin. Après calculs, on trouve

$$x(t) = \ell_0 + (X_0 - \ell_0)\cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega}\sin(\omega_0 t)\,.$$

7 - Rappeler l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur et de l'énergie potentielle gravitationnelle, **puis ensuite** les démontrer. Le repérage doit être précisé par un schéma.

8 - On lance à la verticale un projectile de masse m avec une vitesse v_0. Quelle hauteur maximale va-t-il atteindre avant de retomber ?

Méthode : *comme on cherche la hauteur « maximale », on néglige les frottements si bien que l'énergie mécanique du projectile se conserve. Ainsi,*

$$E_m \underbrace{=}_{CI} \frac{1}{2}m{v_0}^2 + 0 \underbrace{=}_{max} 0 + mgh \qquad \text{d'où} \qquad h = \frac{{v_0}^2}{2g}\,.$$

On aurait également pu poser la question sous la forme « à quelle vitesse minimale un petit diablotin de 4 ans doit il lancer son ballon pour réaliser son rêve de le faire passer par dessus la maison ? »

9 - Établir l'équation du mouvement du pendule pesant par application du théorème du moment cinétique et/ou par conservation de l'énergie mécanique.

Ne pas confondre pendule pesant (solide de moment d'inertie J dont le centre de masse se trouve à une distance d de l'axe de rotation) et pendule simple (point matériel attaché à un fil idéal de longueur ℓ).

10 - Dans le cas d'un champ central quelconque, établir la conservation du moment cinétique et ses conséquences (planéité du mouvement et loi des aires).

11 - En considérant le champ gravitationnel, construire l'énergie potentielle effective adaptée et l'utiliser pour discuter de la nature des trajectoires en fonction de la valeur de l'énergie mécanique.

12 - Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire dans le champ gravitationnel, montrer que le mouvement est uniforme et établir sa vitesse.

Méthode : *Le satellite n'est soumis qu'à la force de gravitation qui est conservative et ne dépend que de la distance r au centre de la Terre. Ainsi, comme le mouvement est conservatif alors $E_m = \text{cte}$ et comme le mouvement est circulaire alors $E_p = E_p(r = R) = \text{cte}$, donc nécessairement $E_c = E_m - E_p = \text{cte}$. L'expression de v s'obtient par projection du TRC, en se rappelant que pour un mouvement circulaire uniforme*

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\,\vec{e}_r\,.$$

On aboutit finalement à

$$v = \sqrt{\frac{M_T \mathcal{G}}{R}}\,.$$

13 - Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire dans le champ gravitationnel, établir la troisième loi de Kepler et la généraliser au cas d'une trajectoire elliptique. L'expression de la vitesse en orbite circulaire pourra être admise ou redémontrée.

14 - On rappelle que la première vitesse cosmique v_1 est la vitesse d'un satellite en orbite circulaire basse ($r \simeq R_\mathrm{T}$), et que la deuxième vitesse cosmique v_2 est la vitesse à communiquer à un satellite au niveau du sol pour qu'il puisse s'affranchir du champ de gravitation terrestre. Établir leur expression. Donner (ou retrouver rapidement) leur ordre de grandeur. L'expression de la vitesse en orbite circulaire pourra être admise ou redémontrée.

IV - Pour compléter vos TD

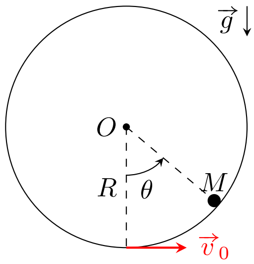
Attention ! Tous ces exercices ne sont pas « à faire », concentrez-vous sur ce qui vous pose des difficultés.

Signification des pictogrammes :

- Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
- Difficulté technique et calculatoire ;
- Exercice important.

Exercice 1 : Mouvement dans un cercle [2 | 2]

Cet exercice est l'exemple canonique de combinaison entre raisonnements énergétiques et par le PFD.



Une bille M de masse m peut se déplacer sans frottement sur la face intérieure d'un support circulaire vertical de rayon R. On la lance avec la vitesse horizontale $\vec{v}_0$ au point le plus bas du cercle.

1 - En utilisant un théorème énergétique, établir l'équation du mouvement de M.

2 - Montrer que la norme de la force de réaction du support circulaire vaut

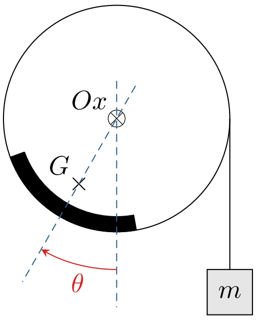
$$N = m\left[\frac{{v_0}^2}{R} + g\,(3\cos\theta - 2)\right]$$

3 - Montrer que la bille reste en contact avec le support lors de tout le mouvement lorsque la vitesse initiale v_0 est supérieure à une vitesse $v_{\min}$ à déterminer.

4 - Supposons $v_0 < v_{\min}$. Déterminer l'angle auquel la bille quitte le support et tombe.

Exercice 2 : Balourd [oral banque PT | 2 | 2]

Voici un exemple d'application du théorème du moment cinétique dans un cas « intéressant », c'est-à-dire dans un cas réel de mécanique du solide où TMC et TRC ne sont pas équivalents.



Un cylindre d'axe (Ox) et de rayon a tourne librement. Un dépôt sur la paroi du cylindre forme un balourd de masse M et centre de masse G. On pose $OG = d$. Le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation vaut $J = Ma^2$. On néglige la masse propre et l'inertie du cylindre devant celles du balourd. Une masse m est accrochée à un fil inextensible de masse nulle enroulé autour du cylindre.

1 - Expliquer qualitativement le mouvement obtenu pour plusieurs valeurs de la masse m. Identifier une masse critique m_c.

2 - Déterminer l'angle d'équilibre θ_e.

3 - Donner la période des petites oscillations du système autour de cet équilibre.

Indication : *La dernière question est difficile ! Dans un sujet d'écrit, on pourrait reformuler les questions de la manière suivante :*

3 - Établir l'équation différentielle vérifiée par θ.

4 - On pose $\varepsilon = \theta - \theta_e$ l'écart par rapport à la position d'équilibre. En supposant $\varepsilon \ll 1$, en déduire l'équation différentielle linéarisée vérifiée par ε, puis donner la période des petites oscillations du système autour de sa position d'équilibre.

Exercice 3 : Modèle classique de trou noir [1 | 1]

Un exercice qui permet de revoir les bases (ce ne sont que des questions de cours !) sur un exemple historique amusant ... mais à la pertinence un peu douteuse.

En 1783, le physicien britannique John Michell eut pour la première fois l'idée de l'existence d'astres dont la gravitation serait si forte que même la lumière ne pourrait s'en échapper. L'idée fut reprise par Pierre-Simon Laplace [1] en 1796, puis oubliée car elle semblait trop abstraite. Elle ressurgit en 1916 dans le cadre de la relativité générale lorsque Karl Schwarzschild vit apparaître un tel objet dans les solutions des équations d'Einstein, que l'on peut voir comme l'analogue relativiste du principe fondamental de la dynamique. Ce concept fut développé par la suite, et

1. Celui-là même qui a introduit la transformation de Laplace ... et qui a également élaboré une théorie dynamique des marées encore utilisée aujourd'hui pour prévoir les heures de pleine et basse mer.

la dénomination de trou noir s'est imposé dans les années 1960. On pense aujourd'hui en avoir détecté plus d'une centaine (la liste est sur Wikipédia), mais comme rien ne peut s'échapper d'un trou noir la détection ne peut être qu'indirecte.

Cet exercice propose de calculer l'ordre de grandeur de la taille et de la densité d'un trou noir dans un modèle heuristique de physique newtonienne. Considérons pour cela un point matériel M de masse m à proximité d'un astre sphérique de masse m_0, de rayon R et de centre O. Cet astre est supposé suffisamment massif pour que l'on puisse considérer que M n'est soumis qu'à la force gravitationnelle due à l'astre. On étudie le mouvement de M dans le référentiel $\mathcal{R}$ astrocentrique, que l'on suppose galiléen.

1 - Exprimer la force gravitationnelle ressentie par M ainsi que l'énergie potentielle dont elle dérive en la supposant nulle à l'infini. Exprimer l'énergie mécanique de M. Celle-ci se conserve-t-elle ?

2 - Montrer que le mouvement de M est nécessairement plan. M étant alors repéré par ses coordonnées polaires, montrer que $C = r^2\dot\theta$ est une constante du mouvement.

3 - Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m\dot r^2 + E_\mathrm{p,eff}(r)$$

en introduisant l'énergie potentielle effective $E_\mathrm{p,eff}(r)$ dont on précisera l'expression en fonction de r.

4 - Tracer l'allure de la courbe représentative de $E_\mathrm{p,eff}(r)$. À l'aide d'un raisonnement graphique, déterminer pour quelles valeurs de E_m le point M peut échapper à l'attraction de l'astre, c'est-à-dire se trouver dans un état de diffusion.

5 - En déduire la vitesse de libération v_lib à la surface de cet astre.

6 - Dans la conception classique de Michell, un trou noir est un astre dont la vitesse de libération est supérieure à $c = 3\cdot10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Calculer le rayon de Schwarzschild R_S de l'astre, c'est-à-dire le rayon maximal qu'il doit avoir pour être un trou noir.

7 - Calculer numériquement R_S pour le Soleil ($M_\mathrm{S} = 2{,}0\cdot10^{30}\,\mathrm{kg}$) et pour la Terre ($M_\mathrm{T} = 6{,}0\cdot10^{24}\,\mathrm{kg}$). En déduire la densité minimale d'un trou de noir de cette masse.

8 - Quelles sont les deux contradictions internes à cette approche ?

Notons toutefois que malgré les deux limites évoquées, le rayon de Schwarzschild donne le bon ordre de grandeur de la taille d'un trou noir de masse m.

V - Correction des exercices

Exercice 1 : Mouvement dans un cercle [💡 2 | ✂ 2]

Le système étudié est la bille, modélisée par un point matériel M de masse m, en évolution dans le référentiel terrestre, galiléen.

$\boxed{1}$ Le point M est soumis à son poids, qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur, et à la réaction du support, qui ne travaille pas : puisqu'il n'y a pas de frottement, seule la composante normale est à prendre en compte. L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit

$$E_\mathrm{pp} = mgz_M + \mathrm{cte} = -mgR\cos\theta + \mathrm{cte}$$

en introduisant de façon très temporaire un axe z vertical ascendant d'origine O. Choisissons dès maintenant la constante en prenant $E_\mathrm{pp} = 0$ en bas du cercle, c'est-à-dire lorsque $\theta = 0$, ce qui donne

$$E_\mathrm{pp} = -mgR\cos\theta + mgR = mgR(1-\cos\theta)$$

De plus, comme le mouvement est circulaire, on connaît la vitesse de M d'où on déduit son énergie cinétique

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}m(R\dot\theta)^2$$

L'énergie mécanique de la bille est alors une constante du mouvement, qui vaut

$$E_\mathrm{m} = -mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}m(R\dot\theta)^2$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = mgR\,\dot\theta\sin\theta + mR^2\dot\theta\ddot\theta = 0$$

Comme $\dot\theta$ ne peut pas être constamment nul (cela signifierait que la vitesse est toujours nulle, or on sait qu'à $t = 0$ la vitesse de la bille n'est pas nulle), on peut simplifier pour obtenir

$$mR^2\ddot\theta + mgR\sin\theta = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\ddot\theta + \frac{g}{R}\sin\theta = 0}$$

On reconnaît l'équation d'un pendule simple.

2 Le meilleur moyen de déterminer une force inconnue est d'écrire le principe fondamental de la dynamique,

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{N}$$

On utilise ici évidemment le répérage polaire de centre O avec $r = R$ constant, d'où

$$\begin{cases} -mR\dot\theta^2 = -N + mg\cos\theta \\ mR\ddot\theta = mg\sin\theta \end{cases}$$

car $\vec{N}$ est orientée selon $-\vec{u}_r$. L'équation projetée sur $\vec{u}_\theta$ donne l'équation du mouvement, déterminée énergétiquement, alors que l'équation projetée sur $\vec{u}_r$ donne accès à la norme N,

$$N = mR\dot\theta^2 + mg\cos\theta\,.$$

Or on a montré précédemment que

$$E_\mathrm{m} = mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}m(R\dot\theta)^2 \qquad \text{d'où} \qquad mR\dot\theta^2 = \frac{2}{R}E_\mathrm{m} + 2mg(\cos\theta - 1)$$

Ainsi,

$$N = 2RE_\mathrm{m} + mg(3\cos\theta - 2)\,.$$

Enfin, comme l'énergie mécanique est une constante du mouvement, sa valeur est toujours égale à sa valeur initiale. Comme on a **déjà** choisi la référence d'énergie potentielle en bas du cercle, alors

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c}(0) + E_\mathrm{p}(0) = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + 0$$

> *Il est absolument indispensable de garder la même référence d'énergie potentielle tout au long de l'exercice. En effet, E_m est définie à une constante additive près, ce qui n'est pas le cas de la force. Changer malencontreusement de constante en cours de route ferait apparaître la différence entre les constantes dans l'expression de la force, ce qui n'a aucun sens.*

Cette expression donne finalement le résultat escompté,

$$\boxed{N = m\left[\frac{{v_0}^2}{R} + g\,(3\cos\theta - 2)\right]}$$

3 La norme N doit par définition rester positive tout au long du mouvement : si elle s'annule, c'est que le contact entre le support et la bille est rompu. Le premier terme entre crochets est toujours positif. En revanche, le second terme peut prendre des valeurs négatives. La valeur la plus petite qu'il puisse atteindre, lorsque $\cos\theta = -1$, est $-5g$. Ainsi, la bille ne décolle pas du support si

$$\frac{{v_0}^2}{R} - 5g > 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v_0 > v_\mathrm{min} = \sqrt{5gR}}$$

4 Supposons $v_0 < v_\mathrm{min}$, et cherchons l'angle θ pour lequel la norme de N s'annule,

$$\frac{{v_0}^2}{R} + g\,(3\cos\theta - 2) = 0$$

$$3g\cos\theta = 2g - \frac{{v_0}^2}{R}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{3} - \frac{{v_0}^2}{3gR}$$

$$\boxed{\theta = \arccos\left(\frac{2}{3} - \frac{{v_0}^2}{3gR}\right)}$$

Exercice 2 : Balourd

[oral banque PT | 2 | 2]

1 Deux types de mouvement sont possibles :
- si m est suffisamment faible, alors le poids du balourd suffit à compenser celui de la masse et il existe une position d'équilibre ;
- si m est trop élevée, alors le poids de la masse entraîne le cylindre en rotation et le fil se déroule complètement.

Le moment du poids du balourd est maximal pour $\theta = \pi/2$, voir figure 1. Dans cette situation, en utilisant les bras de levier pour calculer les moments par rapport à Ox,

$$\mathcal{M}_{\mathrm{b,max}} + \mathcal{M}_m = -Mgd + m_\mathrm{c} ga = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{m_\mathrm{c} = M\frac{d}{a}\,.}$$

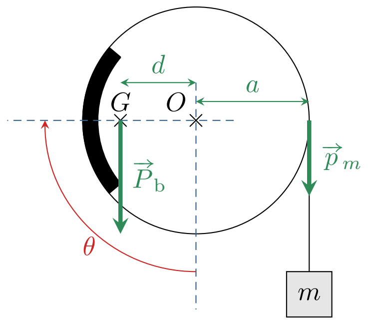


Figure 1 – Position d'équilibre lorsque $m = m_\mathrm{c}$.

> *En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la masse m puis en supposant que le fil transmet parfaitement les efforts, on peut montrer que la force exercée par le fil sur le cylindre vaut en fait*
>
> $$\vec{F} = m\vec{g} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$
>
> *avec $\vec{v}$ la vitesse de la masse m. On suppose ici son accélération suffisamment faible devant $\vec{g}$ pour la négliger.*

2 Évidemment, on suppose $m < m_\mathrm{c}$. Le point d'application de $\vec{p}_\mathrm{m}$ ne dépend pas de θ, donc son moment par rapport à (Ox) vaut toujours

$$\mathcal{M}_m = mga\,.$$

Le moment du poids du balourd vaut

$$\mathcal{M}_\mathrm{b} = (\overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}_\mathrm{b}) \cdot \vec{e}_x = -Mgd\sin\theta$$

Dans la position d'équilibre, ces deux moments se compensent donc

$$-Mgd\sin\theta_\mathrm{e} + mga = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\theta_\mathrm{e} = \arcsin\frac{ma}{Md}\,.}$$

> *On retrouve la condition d'existence de la position d'équilibre : pour qu'elle soit définie, il faut*
>
> $$ma < Md \qquad \text{soit} \qquad m < \frac{Md}{a} = m_c\,.$$

3 D'après le théorème du moment cinétique,

$$J\ddot{\theta} = -Mgd\sin\theta + mga$$

On se place au voisinage de la position d'équilibre : on pose donc

$$\theta = \theta_\mathrm{e} + \varepsilon \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon \ll 1\,.$$

On peut alors faire un développement limité du sinus :

$$\sin(\theta_\mathrm{e} + \varepsilon) = \sin\theta_\mathrm{e} + \varepsilon\,\cos\theta_\mathrm{e} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\,.$$

> *Il s'agit ni plus ni moins de la formule de Taylor,*
> $$f(a+h) = f(a) + h\,f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \dots$$
> *Attention au développement limité : ce n'est pas l'angle θ qui est faible, mais bien l'écart ε. Il est donc a priori faux de faire un développement limité par rapport à θ.*

L'équation différentielle devient

$$J\ddot{\varepsilon} + Mgd\cos\theta_\mathrm{e}\,\varepsilon = -Mgd\sin\theta_\mathrm{e} + mga\,,$$

et compte tenu de l'expression de $\sin\theta_\mathrm{e}$ obtenue à la question précédente on obtient

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{Mgd\cos\theta_\mathrm{e}}{J}\varepsilon = 0\,.$$

> *Il est normal de trouver un second membre nul : l'équation différentielle porte sur l'écart à la position d'équilibre, qui est par définition nul lorsque le système est à l'équilibre.*

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0{}^2 = \frac{Mgd\cos\theta_\mathrm{e}}{J} = \frac{Mgd\sqrt{1-\left(\dfrac{ma}{Md}\right)^2}}{Ma^2} = \frac{g}{Ma^2}\sqrt{M^2d^2 - m^2a^2}$$

d'où on déduit la période des oscillations

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{Ma^2}{g\sqrt{M^2d^2-m^2a^2}}}\,.}$$

Exercice 3 : Modèle classique de trou noir [💡 1 | ✂ 1]

1 La force de gravitation et l'énergie potentielle dont elle dérive s'écrivent

$$\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{m_0\,m}{r^2}\vec{e}_r \qquad \text{et} \qquad E_\mathrm{p} = -\mathcal{G}\frac{m_0\,m}{r}\,.$$

2 Voir cours : c'est une conséquence de la conservation du moment cinétique.

3 Voir cours : on remplace $\dot{\theta}$ par C/r^2 dans l'expression de l'énergie mécanique, ce qui permet d'identifier l'énergie potentielle effective

$$E_\mathrm{p,eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}\,m_0\,m}{r}\,.$$

Attention : c'est une « fausse » énergie potentielle, qui contient un terme issu de l'énergie cinétique. On peut s'en rendre compte en notant la présence de la constante des aires C, qui dépend des conditions initiales.

4 Voir cours et figure 2. Le point M peut échapper à l'attraction de l'astre si sa trajectoire est non-bornée pour $r \to \infty$, c'est-à-dire pour $E_\mathrm{m} \geq 0$.

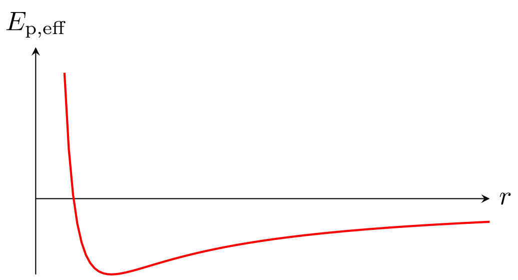


Figure 2 – Profil d'énergie potentielle effective au voisinage d'un astre sphérique.

5 Voir cours. On exprime la valeur de l'énergie mécanique à la limite d'un état de diffusion ($E_\mathrm{m} = 0$) à la surface de l'astre (distance R, vitesse v_lib). On peut le retrouver plus qualitativement en exprimant la conservation de l'énergie mécanique entre la surface de l'astre et une distance infinie en indiquant qu'à la limite la particule s'est infiniment éloignée de l'astre ($r \to \infty$) mais n'a plus qu'une vitesse nulle ($v = 0$). Ainsi,

$$\frac{1}{2}\, m\, v_{\text{lib}}^2 - \frac{\mathcal{G}\, m_0\, m}{R} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2\,\mathcal{G}\, m_0}{R}}}$$

> *Attention à bien utiliser l'énergie cinétique et l'énergie potentielle « complètes », et surtout pas l'énergie potentielle effective. La vitesse v_{lib} a une composante orthoradiale, et la constante des aires ne doit pas rester dans le résultat.*

6 Par définition du rayon de Schwarzschild, si l'astre a pour rayon R_{S} alors sa vitesse de libération est égale à c. On en conclut que l'astre est un trou noir si

$$\boxed{R < R_{\text{S}} = \frac{2\,\mathcal{G}\, m_0}{c^2}}$$

7 Numériquement,

$$\boxed{R_{\text{S,S}} = 3{,}0\,\text{km} \qquad \text{et} \qquad R_{\text{S,T}} = 9{,}0\,\text{mm}}$$

ce qui donne en termes de densité

$$\boxed{\rho_{\text{S}} = 7{,}7 \cdot 10^{19}\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3} \qquad \text{et} \qquad \rho_{\text{S}} = 8{,}5 \cdot 10^{30}\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}\,.}$$

C'est phénoménal : imaginez toute la masse de la Terre concentrée dans une balle de babyfoot ou de ping-pong !

8 Une première contradiction consiste à généraliser des résultats de mécanique classique à des vitesses égales à la vitesse de la lumière, qui se rapportent donc au **domaine de la relativité**. La seconde contradiction est la généralisation de résultats de gravitation, qui s'appliquent donc aux particules massives, à la lumière, alors qu'on sait que **les photons sont sans masse**.