



BLAISE PASCAL
PT 2019-2020

Révisions – Bloc 4

Gauss et Ampère

Comme son nom l'indique, ce bloc de révision ne concerne que le calcul des champs \vec{E} et \vec{B} par les théorèmes de Gauss et d'Ampère. Les aspects relatifs au potentiel électrostatique seront revus dans un autre bloc, en même temps que le mouvement des particules chargées.

Année	Chapitre	Ce qu'il faut réviser	Support	Prioritaire	😊
PT	17	Électrostatique	Analyser les symétries et invariances d'une distribution de charges (M)	***	
PT	17	Électrostatique	Appliquer le théorème de Gauss (M)	***	
PT	17	Électrostatique	Exemples fondamentaux : cylindre (D), sphère (D), plan chargé en surface (R+D)	*	
PT	17	Électrostatique	Analogie gravitationnelle		
PT	19	Magnétostatique	Analyser les symétries et invariances d'une distribution de courant (M)		
PT	19	Magnétostatique	Appliquer le théorème d'Ampère (M)		
PT	19	Magnétostatique	Exemples fondamentaux : fil (D), cylindre (D), solénoïde (R+D)	*	
PTSI		Induction	Exemple fondamental : inductance d'un solénoïde (D)		

Plan de la fiche

I	Ressources en ligne	1
II	Rappels de cours	2
II.1	Tableau comparatif entre champ électrostatique et champ magnétostatique	2
II.2	Méthode : appliquer le théorème de Gauss ou d'Ampère	2
II.3	Complément : démonstration énergétique de l'inductance d'une bobine	3
III	Questions de cours	3
IV	Pour compléter vos TD	4
1	Champ créé par une distribution à symétrie sphérique	4
2	Inductance d'un tore à section carrée	4
V	Correction des exercices	4
1	Champ créé par une distribution à symétrie sphérique	4
2	Inductance d'un tore à section carrée	6

I - Ressources en ligne

Scanner ou cliquer sur les QR-code pour accéder aux ressources.

- L'essentiel du cours sous forme de cartes mémo : cartes réalisées par Christophe Cayssiols.



Cartes utilisables pour ce bloc de révisions : toutes celles des thèmes « électrostatique » et « magnétostatique ».

II - Rappels de cours

II.1 - Tableau comparatif entre champ électrostatique et champ magnétostatique

	Champ électrostatique	Champ magnétostatique
Sources	Charges statiques	Courant électrique Matière aimantée
Effet d'un plan de symétrie Π_s des sources	Un plan Π_s des sources est un plan de symétrie du champ \vec{E} . $\vec{E}(M_s \in \Pi_s) \in \Pi_s$	Un plan Π_s des sources est un plan d'anti-symétrie du champ \vec{B} . $\vec{B}(M_s \in \Pi_s) \perp \Pi_s$
Effet d'un plan d'anti-symétrie Π_a des sources	Un plan Π_a des sources est un plan d'anti-symétrie du champ \vec{E} . $\vec{E}(M_a \in \Pi_a) \perp \Pi_a$	Un plan Π_a des sources est un plan de symétrie du champ \vec{B} . $\vec{B}(M_a \in \Pi_a) \in \Pi_a$
Équation de Maxwell : lien entre champ et source	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\oiint_{SG} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$ $\oint_{CA} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}}$
Équation de Maxwell : structure intrinsèque du champ	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$ $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \text{ (hors progr)}$

II.2 - Méthode : appliquer le théorème de Gauss ou d'Ampère

- **On commence par un schéma !**

Indispensable pour bien réfléchir, commencer par schématiser la distribution, parfois en deux vues, et y placer un point M quelconque : celui où l'on va calculer le champ. Cette étape est l'analogue du « soit $x \in \mathbb{R}$ » que vous connaissez bien en maths.

- **Symétries de la distribution** : donnent la direction du champ, c'est-à-dire la nullité de certaines composantes.

🔴🔴🔴 **Attention !** Les seuls plans de symétrie intéressants sont ceux passant par le point M où l'on souhaite calculer le champ. Il en existe souvent beaucoup d'autres, mais ils ne sont pas utiles.

On s'intéresse aux propriétés de symétrie **de la distribution**, et pas à celles du champ que l'on ne connaît pas a priori. Vous le ferez « instinctivement », mais attention à la rédaction dans votre copie.

Pour un champ magnétostatique, il est plus efficace de s'intéresser aux symétries de la distribution de courant : il suffit d'un seul plan de symétrie pour connaître la direction de \vec{B} , alors qu'il faudrait deux plans d'anti-symétrie.

Réciproquement, il serait plus efficace de chercher des plans d'anti-symétrie de la distribution de charge pour calculer un champ électrostatique ... sauf que les champs créés par de telles distributions ne sont pas calculables par le théorème de Gauss, si bien qu'on ne les rencontrera en pratique jamais à notre niveau.

- **Invariances de la distribution** : donnent les variables dont dépend le champ.

Attention à la rédaction dans une copie : on parle d'invariance par translation le long d'un axe, ou par rotation autour d'un axe ... mais on évitera de parler comme un barbare de « rotation selon θ ».

- **Choix du domaine d'intégration** :

Pour prétendre au titre de « bonne » surface de Gauss, une surface doit être ... de Gauss (fermée et orientée vers l'extérieur) et permettre d'exprimer facilement le flux en fonction du champ au point qui nous intéresse. Les astuces classiques (p.ex. fermer par des plans au travers desquels le flux est nul) sont à connaître à partir des exemples fondamentaux. Même chose pour un « bon » contour d'Ampère.

Penser à bien représenter le domaine d'intégration sur le schéma.

- **Calcul du flux ou de la circulation** :

Si l'étape précédente a été bien réalisée, normalement celle-ci est quasiment immédiate ! Pensez malgré tout à bien la rédiger.

- **Calcul de la charge intérieure ou du courant enlacé :**

Il est généralement nécessaire de faire une disjonction de cas selon que le point M se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de la distribution.

Il faut être vigilant à l'algébrisation du courant enlacé : s'il traverse le contour d'Ampère dans le sens donné par la règle de la main droite, il est compté positivement et négativement sinon.

- **Conclusion :**

Conclure « vraiment », c'est-à-dire en précisant la disjonction des cas et sans oublier que les champs sont vectoriels ... et sans oublier non plus ε_0 et μ_0 .

II.3 - Complément : démonstration énergétique de l'inductance d'une bobine

Considérons une bobine cylindrique de longueur ℓ , rayon R , formée de N spires parcourues par un courant I . Pour établir l'expression de son inductance, nous avons utilisé une méthode passant par le calcul du flux propre et l'identification à la définition $\phi_p = LI$. Je vous propose ici une méthode alternative reposant sur l'énergie magnétique, qui pourrait éventuellement apparaître dans un sujet : on peut imaginer un enchaînement de questions de type calcul du champ, puis en déduire l'énergie magnétique, puis en déduire l'expression de L .

À partir de la loi de comportement de la bobine connue en électronique, on peut assez facilement montrer qu'elle stocke une énergie magnétique

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} LI^2.$$

Par ailleurs, la densité volumique d'énergie magnétique est donnée par

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0^2 (N/\ell)^2 I^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{\ell^2} I^2.$$

Le champ étant nul à l'extérieur, on en déduit l'énergie magnétique totale stockée dans la bobine

$$\mathcal{E}_L = u_m \times \pi R^2 \ell = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\pi R^2 N^2}{\ell} I^2.$$

Par identification entre les deux expressions de \mathcal{E}_L , on en déduit

$$L = \mu_0 \frac{\pi R^2 N^2}{\ell}.$$

III - Questions de cours

1 - Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé par un cylindre infini uniformément chargé en volume.

2 - Déterminer par application du théorème de Gauss gravitationnel le champ de gravitation créé par une planète sphérique de masse volumique uniforme.

3 - Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé en surface.

Sur toutes les questions relatives au théorème de Gauss, les interrogateurs seront particulièrement vigilants à la rigueur de votre démarche.

4 - Établir l'expression du champ magnétostatique créé par un fil rectiligne parcouru par un courant d'intensité I .

5 - Établir l'expression du champ magnétostatique créé par un cylindre d'axe (Oz) parcouru par une densité volumique de courant $\vec{j} = J_0 \vec{e}_z$ uniforme.

6 - Établir l'expression du champ magnétostatique créé en tout point de l'espace par un solénoïde d'axe (Oz) formé de n spires par unité de longueur et parcouru par un courant d'intensité I . Pour mener le calcul à son terme, le champ doit être partiellement fourni par l'interrogateur :

▷ ou bien on admettra que le champ à l'extérieur du solénoïde est uniformément nul ;

▷ ou bien on admettra que le champ sur l'axe du solénoïde vaut $\mu_0 n I \vec{e}_z$.

7 - Établir l'expression de l'inductance d'une bobine cylindrique de longueur ℓ , rayon R , contenant N spires. L'expression du champ créé par la bobine sera rappelée sans démonstration par l'étudiant.

IV - Pour compléter vos TD

🔥 🔥 🔥 **Attention !** Tous ces exercices ne sont pas « à faire », concentrez-vous sur ce qui vous pose des difficultés.

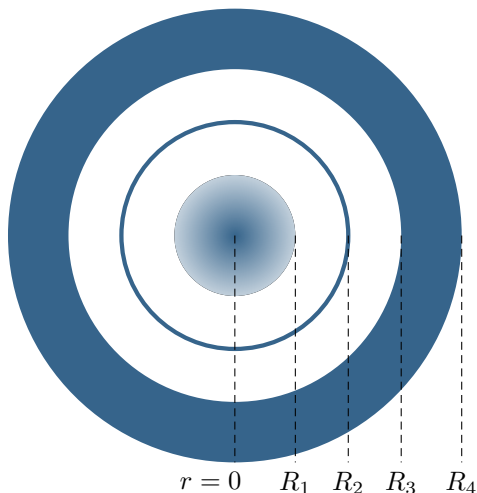
Signification des pictogrammes :

- 💡 Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
- ✂️ Difficulté technique et calculatoire ;
- ⊗ Exercice important.

Exercice 1 : Champ créé par une distribution à symétrie sphérique

[💡 1 | ✂️ 2 | ⊗]

Voici un exemple de distribution de charge qui n'a probablement aucune réalité physique, mais qui permet de faire un petit tour des situations que vous pouvez rencontrer avec le théorème de Gauss.



Considérons la distribution de charge ci-contre, supposée à symétrie sphérique.

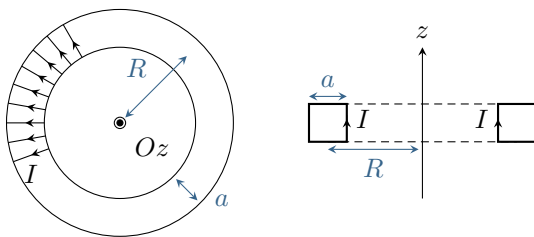
- ▷ pour $0 \leq r \leq R_1$, la densité volumique de charge évolue linéairement : $\rho = a/r^2$;
- ▷ pour $R_1 < r < R_2$, $\rho = 0$;
- ▷ en $r = R_2$ se trouve une coquille sphérique chargée uniformément en surface par une densité σ_0 ;
- ▷ pour $R_2 < r < R_3$, $\rho = 0$;
- ▷ pour $R_3 < r < R_4$, la densité de charge est uniforme : $\rho = \rho_0$;
- ▷ pour $r > R_4$, $\rho = 0$.

- 1 - Calculer la charge totale Q_{tot} contenue dans la distribution.
- 2 - Calculer le champ électrostatique créé par cette distribution en tout point de l'espace.
- 3 - Commenter l'expression du champ de part et d'autre de toutes les discontinuités de la distribution ($r = R_1, R_2, R_3, R_4$).
- 4 - Commenter l'expression du champ pour $r \geq R_4$.

Exercice 2 : Inductance d'un tore à section carrée

[💡 2 | ✂️ 2]

Un exercice classique de magnétostatique, dans lequel la disjonction des cas pour le calcul du courant enlacé n'est pas immédiate.



Considérons le tore à section carrée schématisé ci-contre, formé de $N \gg 1$ spires jointives.

- 1 - Calculer le champ magnétique créé par le tore en tout point de l'espace. On supposera $a \ll R$, ce qui permet de faire l'hypothèse que toute ligne de champ interne au tore a pour longueur $2\pi R$.
- 2 - En déduire le flux propre du tore et son inductance.
- 3 - Exprimer l'énergie magnétique totale stockée dans le tore.
- 4 - Retrouver l'expression de son inductance.

V - Correction des exercices

Exercice 1 : Champ créé par une distribution à symétrie sphérique

[💡 1 | ✂️ 2 | ⊗]

1 Charge totale contenue dans la boule centrale :

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \iiint \rho(r) \underbrace{r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi}_{\text{volume élémentaire}} \\
 &= \int_0^{R_1} a dr \times \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi}_{=4\pi} \\
 Q_1 &= 4\pi a R_1.
 \end{aligned}$$

⚠️ ⚠️ ⚠️ **Attention !** Comme la densité de charge n'est pas uniforme, passer par un calcul intégral est **indispensable**. Il est clairement faux d'écrire quelque chose comme

$$Q_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \times \frac{\sigma}{R_1^2}$$

Charge totale de la coquille sphérique :

$$Q_2 = 4\pi R_2^2 \sigma.$$

Charge totale contenue dans la couche épaisse extérieure : la densité volumique de charge étant uniforme, la méthode la plus simple consiste à raisonner par soustraction.

$$Q_3 = \frac{4}{3}\pi \rho_0 R_4^3 - \frac{4}{3}\pi \rho_0 R_3^3 = \frac{4}{3}\pi \rho_0 (R_4^3 - R_3^3).$$

⌋ Bien sûr, un calcul intégral est possible ... mais inutilement compliqué ici.

La charge totale de cette distribution est donc

$$Q_{\text{tot}} = 4\pi a R_1 + 4\pi R_2^2 \sigma + \frac{4}{3}\pi \rho_0 (R_4^3 - R_3^3)$$

2 Le schéma est dans l'énoncé et la géométrie est simple : on peut se contenter d'y ajouter un point M quelconque sans pour autant le refaire sur la copie.

• **Symétries de la distribution** : tout plan contenant le centre O de la distribution et le point M est plan de symétrie de la distribution. Le champ $\vec{E}(M)$ est inclus dans chacun de ces plans, donc dans leur intersection. Ainsi,

$$\vec{E}(M) = E_r(M) \vec{e}_r.$$

• **Invariances de la distribution** : par toute rotation autour de O , donc $E_r(M)$ est indépendant des variables angulaires, soit

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r.$$

• **Choix de la surface de Gauss** : évidemment la sphère de rayon r passant par M .

• **Calcul du flux sortant** : immédiat,

$$\oiint_{\text{SG}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r(r) \times 4\pi r^2.$$

• **Calcul de la charge intérieure** : le calcul se mène simplement en généralisant les résultats de la question 1.

▷ pour $r \leq R_1$:

$$Q_{\text{int}} = 4\pi a r$$

▷ pour $R_1 \leq r < R_2$:

$$Q_{\text{int}} = 4\pi a R_1$$

▷ pour $R_2 < r \leq R_3$:

$$Q_{\text{int}} = 4\pi a R_1 + 4\pi \sigma R_2^2$$

▷ pour $R_3 \leq r \leq R_4$:

$$Q_{\text{int}} = 4\pi a R_1 + 4\pi \sigma R_2^2 + \frac{4}{3}\pi \rho_0 (r^3 - R_3^3)$$

▷ pour $r \geq R_4$: on se trouve à l'extérieur de la distribution, donc

$$Q_{\text{int}} = Q_{\text{tot}}.$$

• **Conclusion** : par application du théorème de Gauss,

▷ pour $r \leq R_1$:

$$\vec{E} = \frac{a}{\varepsilon_0 r} \vec{e}_r.$$

▷ pour $R_1 \leq r < R_2$:

$$\vec{E} = \frac{a R_1}{\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$

▷ pour $R_2 < r \leq R_3$:

$$\vec{E} = \frac{aR_1 + \sigma R_2^2}{\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$

▷ pour $R_3 \leq r \leq R_4$:

$$\vec{E} = \left[\frac{aR_1 + \sigma R_2^2}{\varepsilon_0 r^2} + \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \left(r - \frac{R_3^3}{r^2} \right) \right] \vec{e}_r$$

▷ pour $r \geq R_4$:

$$\vec{E} = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$

3 On constate que le champ électrostatique est continu en tout point des distributions volumiques et à l'interface entre deux distributions volumiques, c'est-à-dire en $r = R_1, R_3$ et R_4 . En revanche, il est discontinu de part et d'autre d'une distribution surfacique, c'est-à-dire en $r = R_2$. La discontinuité est donnée par la relation de passage,

$$\vec{E}(r=R_2^+) - \vec{E}(r=R_2^-) = \frac{aR_1 + \sigma R_2^2}{\varepsilon_0 R_2^2} \vec{e}_r - \frac{aR_1}{\varepsilon_0 R_2^2} \vec{e}_r = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_r.$$

4 Pour $r > R_4$, le champ prend la même expression que s'il était créé par une charge ponctuelle Q_{tot} placée au centre de la distribution. Ce résultat est valable à l'extérieur de n'importe quelle distribution de charge à symétrie sphérique.

Exercice 2 : Inductance d'un tore à section carrée

[2 | 2]

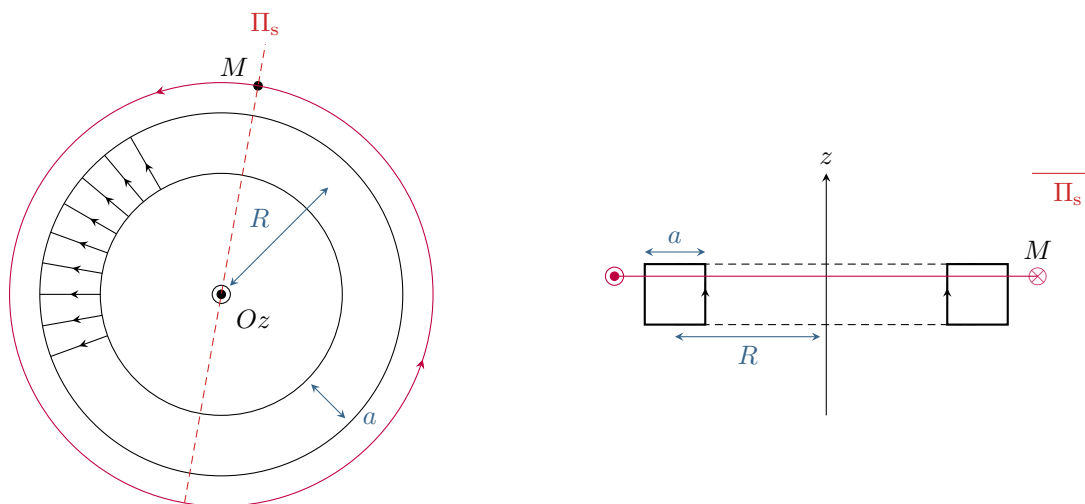


Figure 1 – Tore à section carrée.

1 Raisonnons en un point M quelconque, par exemple celui représenté figure 1.

• **Symétries de la distribution** : le plan Π_s représenté figure 1 est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B}(M)$ lui est orthogonal. Ainsi,

$$\vec{B}(M) = B_\theta(M) \vec{e}_\theta.$$

Dans le cas d'un champ magnétique, on peut contrôler qualitativement la direction de \vec{B} avec la règle de la main droite ... mais elle ne suffit pas à démontrer quoi que ce soit.

• **Invariance de la distribution** : par toute rotation autour de l'axe (Oz) , donc B_θ est indépendant de la variable angulaire θ , d'où

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r, z) \vec{e}_\theta.$$

• **Choix du contour d'Ampère** : cercle de rayon r et d'axe (Oz) , représenté figure 1.

• **Calcul de la circulation** : compte tenu de l'orientation donnée au contour, $\vec{d}\ell = d\ell \vec{e}_\theta$, donc

$$\oint_{\text{CA}} \vec{B} \cdot \vec{d}\ell = B_\theta(r, z) 2\pi r.$$

• **Calcul du courant enlacé :**

▷ pour $|z| > a/2$ ou $r < R - a/2$, on a de façon immédiate $I_{\text{enl}} = 0$;

▷ si le point M se trouve à l'intérieur du tore, alors toutes les spires sont enlacées une fois par le contour, avec le courant I orienté dans le sens donné par la règle de la main droite, donc

$$I_{\text{enl}} = NI.$$

▷ enfin, si le point M se trouve dans une situation comme celle de la figure 1 ($|z| < a/2$ et $r > R + a/2$) alors chaque spire est enlacée deux fois par le contour d'Ampère, avec le courant dans les deux sens, soit

$$I_{\text{enl}} = NI - NI = 0.$$

▷ Finalement, le courant enlacé ne prend que deux valeurs :

$$I_{\text{enl}}(M \in \text{tore}) = NI \quad \text{et} \quad I_{\text{enl}}(M \notin \text{tore}) = 0.$$

• **Conclusion :** Le courant enlacé étant nul, il est immédiat que le champ magnétique est **nul à l'extérieur du tore**. Dans le cas où le point M se trouve à l'intérieur du tore, alors d'après le théorème d'Ampère,

$$2\pi r B_{\theta}(M_{\text{int}}) \simeq 2\pi R B_{\theta}(M_{\text{int}}) = \mu_0 NI \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{B}_{\text{int}} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} \vec{e}_{\theta}}.$$

Dans cette approximation, le champ est uniforme à l'intérieur du tore.

2 Compte tenu de l'orientation du courant dans les spires, le vecteur normal à une spire du tore est $+\vec{e}_{\theta}$. On en déduit le flux propre,

$$\phi_p = N \times \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} \times a^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{\text{boxed} \phi_p = \frac{\mu_0 N^2 I a^2}{2\pi R}}$$

d'où on déduit l'expression de l'inductance propre

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2\pi R}}.$$

3 Comme $R \gg a$, alors le volume du tore peut se calculer comme celui d'un parallélépipède de section a^2 et de longueur $2\pi R$ égale à la circonférence moyenne du tore. Ainsi,

$$\mathcal{E}_{\text{magn}} = \frac{B^2}{2\mu_0} \times 2\pi R a^2 = \frac{\mu_0^2 N^2 I^2}{2\mu_0 \times 4\pi^2 R^2} \times 2\pi R a^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{E}_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2\pi R} I^2}.$$

En identifiant avec l'énergie $\frac{1}{2} LI^2$ stockée dans une bobine, on retrouve bien

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2\pi R}}.$$