BLAISE PASCAL
PT 2019-2020

Révisions – Bloc 15

Électromagnétisme dans l'ARQS
Ondes électromagnétiques

Année	Chapitre		Ce qu'il faut réviser	Support	Prioritaire	☺
PT	20	Régime variable	Eq de Maxwell	TD ex 2	***	
PT	20	Régime variable	ARQS : hypothèse L << cT et csq sur les éq de Maxwell			
PT	20	Régime variable	Loi d'Ohm locale, puissance volumique d'effet Joule	TD ex 2 et 5	*	
PT	20	Régime variable	Exemple fondamental : résistance d'un conducteur cylindrique (R+D)	Ex C1	*	
PT	20	Régime variable	Conservation de la charge (R+D par bilan méso et par Maxwell)			
PT	20	Régime variable	Vecteur de Poynting, bilan d'énergie	TD ex 5		
PT	21	OEM	Equation de d'Alembert (R+D)	DS 7	**	
PT	21	OEM	Forme générale des OP, OPP, OPPH (réel + complexe en deux conventions), ondes stationnaires (R)	DS 7, TD ex 7	**	
PT	21	OEM	Relation de dispersion, relation de structure (+ hypothèse : ne s'applique qu'aux OPP), polarisation	DS 7, TD ex 7	*	
PT	21	OEM	Equation de propagation dans un conducteur ohmique (D)	TD ex 4	*	
PT	21	OEM	Pseudo-OPPH, profondeur de peau (D)	TD ex 4	*	
PT	21	OEM	Réflexion sur un conducteur, ondes stationnaires (D + idée du résultat)	DS 7, TD ex 7	*	

Plan de la fiche

I - Ressources en ligne

Scanner ou cliquer sur les QR-code pour accéder aux ressources.

- **L'essentiel du cours sous forme de cartes mémo :** cartes réalisées par Christophe Cayssiols.

Cartes utilisables pour ce bloc de révisions :
- ▷ Équations de Maxwell : officiellement, l'équation de Poynting n'est pas à mémoriser ;
- ▷ Régimes lentement variables ;
- ▷ Propagation d'ondes électromagnétiques : les polarisations autres que rectilignes ne sont pas au programme, et, de mon point de vue, les expressions des ondes réfléchies et transmises à l'interface avec un conducteur ne sont pas à apprendre.

II - Rappels de cours

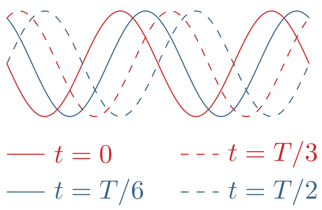
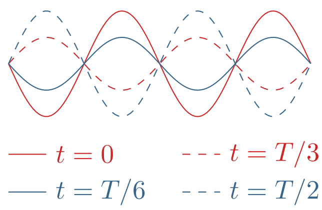
II.1 - Quelles relations pour quelles ondes ?

On considère dans ce tableau une onde électromagnétique se propageant le long de l'axe (Ox) et polarisée rectilignement selon $\vec{e}_z$.

	Expression mathématique	Relation de dispersion	Relation de structure
Onde plane quelconque	$\vec{E}(x,t) = [f(x-ct) + g(x+ct)]\,\vec{e}_z$	✘	✘
Onde plane progressive	$\vec{E}(x,t) = f(x-ct)\vec{e}_z$ OU $\vec{E}(x,t) = g(x+ct)\vec{e}_z$	✘	$\vec{B} = \vec{e}_x \wedge \dfrac{\vec{E}}{c}$
Onde plane progressive harmonique	$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)\vec{e}_z$	$\omega = kc$	$\vec{B} = \vec{e}_x \wedge \dfrac{\vec{E}}{c} = \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$
Onde plane stationnaire quelconque	$\vec{E}(x,t) = f(x)\,g(t)\vec{e}_z$	✘	✘
Onde plane stationnaire harmonique	$\vec{E}(x,t) = E_0 \sin(kx+\psi)\cos(\omega t + \varphi)\vec{e}_z$	$\omega = kc$	✘

Ainsi, la relation de dispersion n'existe que pour les ondes harmoniques (vous vous en seriez doutés !) et la relation de structure que pour les ondes planes progressives (vous vous seriez sans doute trompés !). Rappelons également qu'il ne faut pas confondre direction de propagation et direction de polarisation. Enfin, ces relations ne sont valables que dans le vide, mais pas dans les conducteurs.

II.2 - Comparaison entre OPPH et OPSH

	Onde plane progressive harmonique	Onde plane stationnaire harmonique
Expression	$\sim \cos(\omega t - kx)$	$\sim \sin(kx)\cos(\omega t)$
Chrono-photographie		
Propagation	Progression de l'onde à la célérité c.	Pas de progression mais vibration sur place.
Déformation	Tous les points sont soumis, au cours du temps, aux mêmes champs.	Certains points ne vibrent pas (nœuds) alors que d'autres subissent des vibrations maximales (ventres).
Double périodicité	La longueur d'onde λ et la période T sont reliées par la relation de dispersion $\lambda = cT$.	La longueur d'onde λ et la période T sont reliées par la relation de dispersion $\lambda = cT$.

Quand apparaissent des ondes stationnaires ?

- ▷ Dès lors qu'un nœud de vibration est imposé (point d'attache d'une corde, conducteur parfait, etc.), alors l'onde totale dans le milieu est forcément stationnaire et sa pulsation est a priori quelconque ;
- ▷ Lorsque deux nœuds de vibration sont imposés (corde de guitare, cavité électromagnétique, etc.), alors seules certaines ondes stationnaires peuvent exister dans le milieu, celles dont la pulsation (ou la longueur d'onde) vérifient une condition de quantification qui dépend de la distance L entre les deux nœuds.

III - Questions de cours

1 - Énoncer les quatre équations de Maxwell sous forme locale et en déduire les formes intégrales correspondantes.

2 - En partant de la loi d'Ohm locale, établir l'expression de la résistance R d'un barreau cylindrique en fonction de ses dimensions et de la conductivité électrique du matériau.

3 - Établir l'équation de conservation de la charge par un bilan unidimensionnel, la généraliser sans démonstration à trois dimensions, et la retrouver à partir des équations de Maxwell.

4 - Énoncer sans démonstration l'équation locale de Poynting (bilan d'énergie électromagnétique). En déduire le bilan intégral. Définir et interpréter physiquement chacun des termes.

> *J'ai justifié l'équation locale de Poynting par analogie avec l'équation de conservation de la charge, écrite sous la forme*
> $$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{\Pi} - \vec{j}\cdot\vec{E}\,,$$
> *l'expression du vecteur de Poynting étant admise. Elle doit normalement être rappelée par un énoncé, mais les expressions de w_{em} et $\vec{\Pi}$ sont à connaître. Néanmoins, pour cette colle, je demande aux étudiants de la mémoriser.*

5 - La figure 1 est la représentation spatiale d'une onde à l'instant $t = 0$. Cette onde se propage dans le sens des x **croissants** à la célérité $c = 20\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$. Un capteur est situé en $x = 60\,\mathrm{cm}$. Compléter le chronogramme du signal reçu par le capteur. (correction à la fin de la fiche de révisions)

6 - La figure 2 est la représentation spatiale d'une onde à l'instant $t = 0$. Cette onde se propage dans le sens des x **décroissants** à la célérité $c = 20\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$. Un capteur est situé en $x = 20\,\mathrm{cm}$. Compléter le chronogramme du signal reçu par le capteur. (correction à la fin de la fiche de révisions)

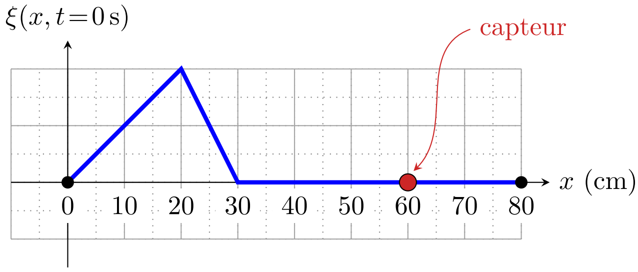


Figure 1 – **Onde se propageant dans le sens des x CROISSANTS.**

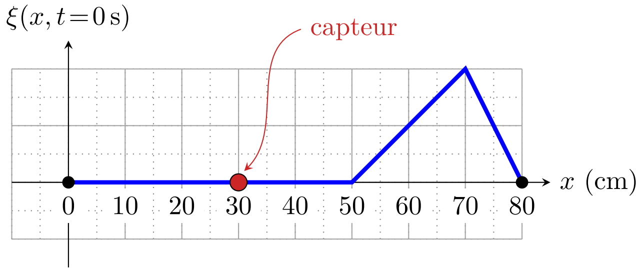


Figure 2 – **Onde se propageant dans le sens des x DÉCROISSANTS.**

7 - En s'appuyant sur deux représentations graphiques **claires**, **propres** et **légendées**, illustrer les différences entre onde plane progressive harmonique et onde plane stationnaire harmonique.

8 - Montrer que la superposition de deux OPPH synchrones de même amplitude se propageant en sens opposé donne une onde stationnaire.

9 - Retrouver la position des nœuds et des ventres d'une onde stationnaire de la forme $\xi(x,t) = A\cos(kx)\cos(\omega t)$. De combien sont séparés deux nœuds consécutifs ? deux ventres consécutifs ? un nœud et un ventre consécutifs ?

> *Nœuds : m est un entier relatif*
> $$\cos(kx_m) = 0 \qquad \textit{donc} \qquad kx_m = \frac{\pi}{2} + m\pi \qquad \textit{et} \qquad x_m = \frac{\lambda}{4} + m\frac{\lambda}{2}\,.$$
> *Ventres :*
> $$\cos(kx_m) = \pm 1 \qquad \textit{donc} \qquad kx_m = m\pi \qquad \textit{et} \qquad x_m = m\frac{\lambda}{2}\,.$$
> *Ainsi, deux nœuds sont séparés de $\lambda/2$ (et non pas de λ comme l'intuition peut laisser croire), deux ventres aussi, et un nœud et un ventre qui se suivent de $\lambda/4$.*
>
> ***Attention !*** *Ne pas oublier le $\pm$ pour les ventres !*

10 - On considère une corde de Melde de longueur L, fixée en $x = 0$ et $x = L$. On cherche ses modes propres sous la forme
$$\xi(x,t) = A\sin(kx+\psi)\cos(\omega t + \varphi)\,.$$
Déterminer les longueurs d'ondes possibles et interpréter graphiquement.

> *Les conditions aux limites donnent $\psi = 0$ (une solution parmi d'autres, mais pour une phase on a toujours le choix ... à condition de rester cohérent par la suite) et*
>
> $$kL = n\pi \qquad d'o\grave{u} \qquad L = n\frac{\lambda}{2}\,.$$
>
> *Cela se voit très bien sur des schémas (cf. vos cours de PTSI !) en se souvenant d'une part que les extrémités de la corde sont des nœuds et d'autre part que deux nœuds sont distants de $\lambda/2$.*

11 - Établir l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide ou dans un conducteur ohmique en basse fréquence, au choix de l'interrogateur. L'étudiant doit savoir simplifier les équations de Maxwell dans le conducteur ohmique.

12 - Démontrer la relation de structure. Sur un exemple de champ électrique donné par l'interrogateur, identifier la direction de propagation et de polarisation de l'onde puis en déduire le champ magnétique.

13 - En partant de l'équation de propagation rappelée par l'interrogateur, établir la relation de dispersion dans un conducteur ohmique. En déduire l'expression des champs réels d'une pseudo-OPPH et l'interpréter (effet de peau, amplitude exponentiellement décroissante au cours de la propagation).

IV - Pour compléter vos TD

Attention ! Tous ces exercices ne sont pas « à faire », concentrez-vous sur ce qui vous pose des difficultés.

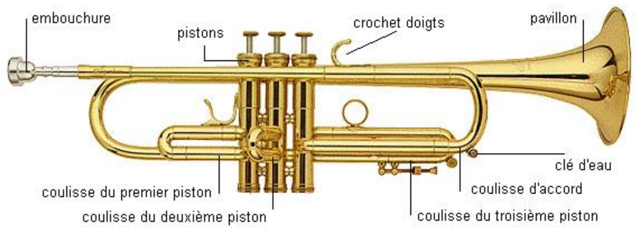
Signification des pictogrammes :

- Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
- Difficulté technique et calculatoire ;
- Exercice important.

L'exercice qui suit est un exercice de PTSI sur les ondes mécaniques. Pour les ondes électromagnétiques, je n'ai pas mieux à vous proposer que de reprendre le DnS 7 sur la guitare électrique !

Exercice 1 : Trompette [2 | 1]

> *Cet exercice pas très difficile permet de reprendre les principaux calculs du cours de PTSI sur les ondes.*



Une trompette est un instrument à vent de la famille des cuivres. Le son y est produit par la vibration des lèvres du trompettiste au niveau de l'embouchure, qui génère une onde acoustique au sein de l'instrument. La trompette peut être modélisée comme un tuyau sonore rectiligne de longueur totale $L = 1{,}40\,\mathrm{m}$, fermé au niveau de l'embouchure et ouvert au niveau du pavillon.

On introduit un axe x tel que l'embouchure se trouve en $x = 0$ et le pavillon en $x = L$.

1 - On modélise l'onde de pression $P_\mathrm{i}(x,t)$ générée par le trompettiste par une onde progressive harmonique d'amplitude P_0, de pulsation ω, et de phase initiale φ_i. Écrire son expression mathématique.

2 - Lorsqu'elle atteint le pavillon, cette onde se réfléchit en conservant la même amplitude, mais avec un déphasage éventuel. Écrire son expression mathématique, en notant φ_r la phase initiale de l'onde réfléchie.

3 - Écrire l'expression de l'onde totale dans la trompette sous la forme

$$P_\mathrm{tot}(x,t) = A\cos(kx+\psi)\cos(\omega t+\varphi)$$

en exprimant A, ψ et φ en fonction des paramètres déjà introduits. Comment s'appelle une telle onde ?

Les notes jouables à la trompette correspondent aux modes propres du tuyau sonore. Les conditions aux limites (tuyau fermé-ouvert) imposent un ventre de pression au niveau de l'embouchure ($x = 0$) et un nœud au niveau du pavillon ($x = L$).

4 - En s'appuyant sur une représentation graphique de l'onde, montrer que les longueurs d'onde λ_n des modes propres sont telles que

$$L = \frac{\lambda_n}{4} + n\frac{\lambda_n}{2}\,.$$

En déduire la fréquence fondamentale ($n = 0$) de la trompette.

5 - Retrouvons ces résultats par le calcul.
***5.a* -** En utilisant la condition aux limites à l'embouchure, montrer que $\psi = 0$ convient.
***5.b* -** Déduire de la seconde condition aux limites que $k_n L = \frac{\pi}{2} + n\pi$ avec n un entier.
***5.c* -** Retrouver enfin la condition sur la longueur d'onde.

Lorsque le trompettiste appuie sur un piston, l'air est dévié dans la coulisse correspondante, ce qui a pour effet de modifier la longueur du tuyau. Le son est « abaissé de trois demi-tons », ce qui signifie que la fréquence fondamentale est divisée par $2^{3/12}$.

6 - En déduire la longueur de la coulisse du troisième piston.

V - Correction des exercices

Exercice 1 : Trompette [2 | 1]

1 L'onde se propage dans le sens des x croissants, donc

$$\boxed{P_\mathrm{i}(x,t) = P_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_\mathrm{i})} \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{\omega}{c}\,.$$

2 L'onde se propage cette fois dans le sens des x décroissants, d'où

$$\boxed{P_\mathrm{r}(x,t) = P_0 \cos(\omega t + kx + \varphi_\mathrm{r})\,.}$$

3 D'après le principe de superposition, $P_\mathrm{tot} = P_\mathrm{i} + P_\mathrm{r}$, et ainsi

$$\begin{aligned} P_\mathrm{tot}(x,t) &= P_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_\mathrm{i}) + P_0 \cos(\omega t + kx + \varphi_\mathrm{r}) \\ &= 2P_0 \cos\left(\frac{2\omega t + 0 + \varphi_\mathrm{r} + \varphi_\mathrm{i}}{2}\right) \cos\left(\frac{0 + 2kx + \varphi_\mathrm{r} - \varphi_\mathrm{i}}{2}\right) \\ &= 2P_0 \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_\mathrm{r} + \varphi_\mathrm{i}}{2}\right) \cos\left(kx + \frac{\varphi_\mathrm{r} - \varphi_\mathrm{i}}{2}\right) \end{aligned}$$

ce qui s'écrit bien sous la forme voulue avec

$$\boxed{A = 2P_0 \qquad \psi = \frac{\varphi_\mathrm{r} - \varphi_\mathrm{i}}{2} \qquad \varphi = \frac{\varphi_\mathrm{r} + \varphi_\mathrm{i}}{2}\,.}$$

Une telle onde est une **onde stationnaire**.

> *On utilise ici la formule d'addition des cosinus (à connaître !)* $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ *avec p l'argument du cosinus de l'onde réfléchie et q celui de l'onde incidente.*
>
> *Si jamais vous preniez p et q dans l'autre sens ce n'est pas un problème, mais rajoute juste une étape où il faut utiliser la parité* $\cos(-x) = \cos x$.

4 Représentons figure 3 l'onde de surpression dans le tuyau, en respectant les conditions aux limites. Ce schéma permet de retrouver que deux nœuds consécutifs sont distants de $\lambda/2$ et qu'un nœud et un ventre qui se suivent sont séparés de $\lambda/4$. On voit alors apparaître que les conditions aux limites imposent

$$\boxed{L = \frac{\lambda_n}{4} + n\frac{\lambda_n}{2}\,.}$$

Pour $n = 0$, on trouve $L = \lambda_0/4$, et en utilisant la relation de dispersion sous la forme $\lambda_0 = c/f_0$ on en déduit

$$L = \frac{c}{4f_0} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f_0 = \frac{c}{4L} = 61\,\mathrm{Hz}\,.}$$

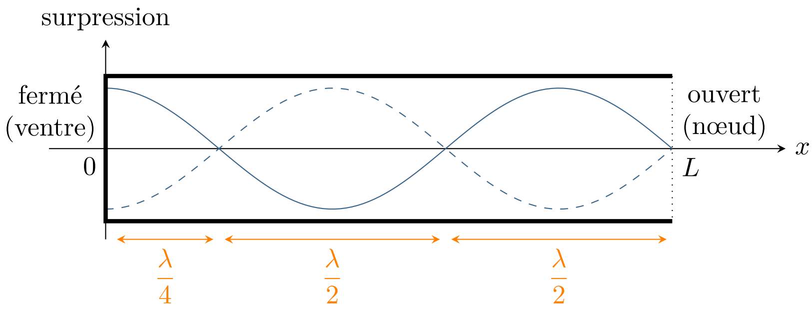


Figure 3 – Fuseaux d'onde stationnaire dans la trompette.

> ***Rappel :*** *la vitesse du son dans l'air vaut* $c = 3{,}4\cdot10^2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, *valeur à connaître ... et à ne pas confondre avec* $c = 3\cdot10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ *qui est la vitesse de la lumière !!!*

5 Repartons de l'expression $P_{\text{tot}}(x,t) = A\cos(kx+\psi)\cos(\omega t+\varphi)$. L'amplitude locale de l'onde stationnaire est donnée par $A(x) = A\,|\cos(kx+\psi)|$.

5.a Un ventre se trouve au niveau de l'embouchure, donc l'amplitude est maximale. On en déduit

$$\cos(k_n\times 0+\psi) = \pm1 \qquad \text{soit} \qquad \psi = n\pi \quad (n \text{ entier})$$

Choisir $\psi = 0$ est donc compatible avec la condition limite.

5.b Un nœud se trouve au niveau du pavillon, donc l'amplitude locale est nulle, d'où

$$\cos(k_nL) = 0 \qquad \text{soit} \qquad k_nL = \frac{\pi}{2} + n\pi\,.$$

> *Ne pas hésiter à s'appuyer sur un cercle trigonométrique au brouillon pour répondre à ces questions sans erreur !*

5.c De cette condition on déduit

$$L = \frac{\pi}{2k_n} + \frac{n\pi}{k_n}$$

et comme par définition $k_n = 2\pi/\lambda_n$ alors

$$\boxed{L = \frac{\lambda_n}{4} + n\frac{\lambda_n}{2}\,.}$$

6 Lorsque le trompettiste appuie sur le piston, la nouvelle fréquence fondamentale est donnée par

$$f_0' = \frac{4c}{L'} = \frac{f_0}{2^{3/12}}$$

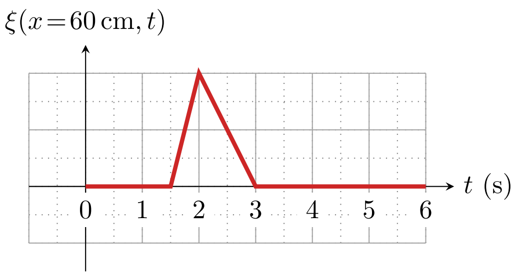
où L' est la longueur totale (tuyau + coulisse). Ainsi,

$$\frac{4c}{L'} = \frac{4c}{2^{3/12}\,L} \qquad \text{d'où} \qquad L' = 2^{3/12}\,L$$

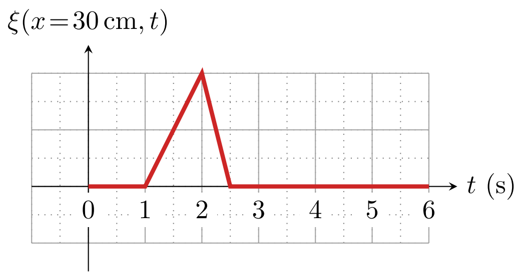
On en déduit enfin la longueur L_c de la coulisse par $L' = L + L_c$, si bien que

$$\boxed{L_c = (2^{3/12}-1)L = 26\,\mathrm{cm}\,.}$$

Correction des questions de cours 5 et 6 : représentations graphiques d'une onde.



Question 5 - Onde se propageant dans le sens des x croissants, la représentation temporelle est « inversée » par rapport à la représentation spatiale.



Question 6 - Onde se propageant dans le sens des x décroissants, la représentation temporelle et la représentation spatiale sont « dans le même sens ».